ОЗНАКОМЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ С МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

ТАЛАБАЛАРНИ МАТЕМАТИК МОДЕЛЛАШТИРИШ МЕТОДЛАРИ БИЛАН ТАНИШТИРИШ

FAMILIARIZATION OF STUDENTS WITH METHODS OF MATHEMATICAL MODELING

https://doi.org/10.53885/edinres.2022.6.6.065

Сиддиков Зайниддин Холдорович,
Старший преподователь, доктор философии по педагогическим наукам (PhD) Ферганкий государственный университет, доцент, кандидат технических наук, Ташкенткий архитектурно- строительный институт

Матгазиев Хусан Меликузиевич
Farg'ona davlat universiteti katta o'qituvchisi, pedagogika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)

Siddiqov Zayniddin Xoldorovich
Toshkent arxitektura-qurilish instituti dotsenti, texnika fanlari nomzodi

Matgaziev Xusan Meliqo'zievich
Senior Lecturer, Doctor of Philosophy in Pedagogical Sciences (PhD) Fergana State University

Siddikov Zayniddin Kholdorovich,
Associate Professor, Candidate of Technical Sciences, Tashkent Institute of Architecture and Construction

Matgaziev Khusan Melikuzievich

Аннотация. Мақолада математикани ўқитишда математик моделлаштириш методлари моделларнинг зарурий ва қисқача тавсифини ўргатишда математик моделлаштириш усуллари, муаммоларни ечишни ўргатиш ва амалий мазмунга ега вазиятларни кўриб чиқиш методологияси ва бурилишни қайта юклаш қобилиятига, чилангарга, пайвандлаш ва бўяш ва қадоқлаш бўлимлари дастгоҳ ва транспорт режаси оптималлик белгиси натижалари математик усулда баён қилинган.

Аннотация. В статье изложены методы математического моделирования при обучении необходимым и краткое описание рассматриваемых моделей, основной же упор сделан на методику обучения решению задач и рассмотрению ситуаций с практическим содержанием, возможности дозагрузить токарный, слесарный, сварочный и покрасочно-упаковочный участки цеха и результат признака оптимальности плана перевозок математиком путём.

.

Annotation. The article outlines the methods of mathematical modeling in teaching the necessary and a brief description of the models under consideration, while the main emphasis is on the methodology for teaching problem solving and considering situations with practical content, the ability to reload the turning, locksmith, welding and painting and packaging sections of the workshop and the result of the sign of optimality of the transportation plan mathematician way.

Калит сўзлар: модель, математик модель, методика, оптимизация, ўйин моделлари, компонент, фаолият, маҳсулот, минимум, максимум.

Ключевые слова: модель, математический модель, методика, оптимизация, игровые модели, компонент, действия, изделия, минимум, максимум.

Key words: model, mathematic model, method, optimizing, game models, component, activity, products, minitum, maxitum.

ВВЕДЕНИЕ. Достижение целей нашего исследования невозможно без рассмотрения психолого-педагогических основ обучения математическому моделированию в ВУЗах технического профиля.

Для развития у учащихся умений организации производства и руководства трудовым коллективом, предполагающих оценку последствий принимаемых решений, использования простых моделей оказывается недостаточно. Поэтому данный материал посвящен рассмотрению методики обучения методам моделирования, позволяющим некоторыми процессами управлять, т.е. допускать использование различных вариантов действий, меняющих протекание этих процессов, и как следствие – их результат.

АНАЛИЗ ЛИТЕРАТУР И МЕТОДОЛОГИЯ. Начнем с возрастных особенностей учащихся, накладывающих отпечаток на все личностное развитие учащегося, ведь с возрастом связан характер деятельности человека, особенности его мышления, его интересов. Так, М.В.Потоцкий, рассматривая психологические основы методики обучения математике, утверждал, что « … в конечном счете почти все основные понятия и проблемы методики определяются в психологических терминах и в психологическом плане » [1].

Возрастной этап, к которому принадлежат учащиеся колледжа, называется старшим школьным возрастом или ранней юностью и охватывает период с 15 по 18 лет. Возможность обучения моделированию в этом возрасте основана на том, что в ранней юности у учащихся уже сформировано абстрактно-логическое мышление [2], общие умственные способности, приближены ко взрослым [3], возросла концентрация внимания [4].

Нами будут рассмотрены математические модели:

– оптимизационные, позволяющие находить оптимальный по отношению к заданным критериям вариант протекания процесса или использования имеющихся ресурсов;

– игровые с нулевой суммой, разрешающие конфликтные ситуации с наименьшими для двух сторон потерями в тех случаях, когда их позиции диаметрально противоположны;

– игр с природой, использование которых развивает умение принимать взвешенные решения в условиях неопределенности.

Изучение указанных моделей, к сожалению, не входит в основной курс математики высших учебных заведений. Это делает необходимым и краткое описание рассматриваемых моделей, основной же упор сделан на методику обучения решению задач и рассмотрению ситуаций с практическим содержанием.

Такое обучение, основанное на овладении практическими приемами, необходимыми в предстоящей трудовой деятельности, по нашему мнению, являясь операционным компонентом обучения математике, формирует управленческие навыки и умения учащихся и подготавливает их к выполнению производственно-управленческой деятельности.

Начнем с описания методики обучения методам моделирования, получившим название оптимизационных.

Знакомя с этими методами, учащимся необходимо пояснить, что часто, при целенаправленном управлении каким-либо процессом или явлением, имеется возможность сравнить: какое действие ведет к лучшим результатам, а какое – к худшим и оценить результат каждого действия.

Анализ

В общем виде некоторый процесс, оптимизацию которого необходимо произвести, представляет собой совокупность отношений, связывающих некоторые параметры, определяющие ход процесса. Из множества всех этих параметров *X* будем выделять множество переменных управления *U*, т.е. те значения этих переменных, которые находятся во власти лица, управляющего процессом. Раз можно количественно оценить результат каждого действия управления, значит, известна целевая функция *Ф*, сопоставляющая каждому возможному в данной модели управлению $u \in U$ значение *Ф(u)*. Наилучшее использование, как правило, заключается в поиске либо максимального, либо минимального значения целевой функции *Ф(u)*, нахождение которого даст оптимальное управление *u*.

Задачи такого типа носят название *оптимизационных*. Это же название имеют математические модели, их описывающие, и методы, позволяющие эти модели строить.

Среди оптимизационных можно выделить модели, получившие название задач линейного программирования. Формируя умение строить эти модели, учащимся необходимо пояснить, что линейное программирование возникло в связи с решением разнообразных производственных задач. В общем виде эти задачи формулируются следующим образом. Пусть из различных видов сырья, имеющегося в количествах, соответственно $b_1, b_2, ..., b_m$ (всего *m* видов сырья), может быть изготовлено *n* видов продуктов. Цена единицы *g-го* вида продукта равна c_g. Для получения единицы *g-го* продукта необходимо затратить *i-й* вид сырья в количестве a_{ig} единиц. Какие виды продуктов выгоднее всего изготавливать?

Так как речь идет об очень узкой ситуации, то под словами «выгоднее всего» будем понимать получение наибольшей ценности произведенных продуктов с учетом ограничений на имеющееся сырье. Обозначим через x_g производимое количество *g-го* продукта. Тогда целевая функция, максимум которой мы будем искать, может быть записана в виде $\sum_{g=1}^{n} c_g x_g$.

Перейдем к учету ограничений. Прежде всего, понятно, что производимые количества продуктов не могут быть отрицательными, т.е.

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, ..., \quad x_n \geq 0.$$

Далее, так как для получения единицы *g-го* продукта необходимо затратить a_{ig} единиц *i-го* сырья, то понятно, что для x_g единиц этого продукта потребуется $a_{ig}\, x_g$ единиц *i-го* сырья. Поскольку один вид сырья может использоваться для производства различных продуктов, то суммарные затраты сырья каждого вида не должны превышать имеющиеся ресурсы:

$$\sum_{g=1}^{n} a_{ig} x_g \leq b_i, \ i=1,2,...,m.$$

Окончательно приходим к следующей задаче:

Найти $$\max_{\{x_g\}} \sum_{g=1}^{n} c_g x_g$$

при условиях 1. $x_g \geq 0, \quad g = 1,2,...,n.$

2. $\sum_{g=1}^{n} a_{ig} x_g \leq b_i$, $i = 1,2,...,m.$

Всякий набор значений $x_1, x_2, ..., x_n$, удовлетворяющий условиям 1 и 2, будем называть допустимым планом. Допустимый план, имеющий максимум целевой функции и является оптимальным планом.

В приведенной задаче целевая функция и все ограничения линейны, поэтому такие задачи и получили название задач линейного программирования.

На примерах рассмотрим методику обучения решению задач линейного программирования.

Задача. Имеется возможность дозагрузить токарный, слесарный, сварочный и покрасочно-упаковочный участки цеха на *16, 18, 12 и 10 часов* работы соответственно. Для этого предлагается изготавливать винтовой домкрат и опору кранового пути. В таблице 1 указано время (в часах), необходимое на изготовление предлагаемых видов изделий на каждом участке. Нуль означает, что данный участок в изготовлении участия не принимает. Требуется составить план выпуска предполагаемых изделий для получения наибольшей прибыли, если за изготовление одного домкрата она составляет *4 еди* *3 ед*. за изготовление опоры.

Таблица 1

Изделия	Участки			
	Токарный	Слесарный	Сварочный	Покрасочно-упаковочный
Винтовой домкрат	4	3	0	1
Опора кранового пути	0	2	3	2
Возможная дозагрузка (в часах)	16	18	12	8

Решение. Такие ситуации, когда из одинакового сырья можно изготовить продукцию различной ценности, встречаются в производственной практике очень часто. В данном случае сырьем выступает рабочее время.

Составим математическую модель задачи. Обозначим через x число изготавливаемых домкратов, через y – число опор. На первом участке при изготовлении домкратов затрачивается время $4x$ и $0y$ при изготовлении опор.

Так как время работы на этом участке не должно превышать *16 часов*, то можно записать $4x + 0y \le 16,$

$$4x \le 16.$$

Рассуждая аналогично, можно записать ограничения для оставшихся участков:

$$3x + 2y \le 18,$$

$$3y \le 12,$$

$$x + 2y \le 8.$$

Количество выпускаемых изделий выражается неотрицательным числом, значит, набор полученных ограничений пополнится условиями

$$x \ge 0, \quad y \ge 0.$$

Значения x и y должны удовлетворять всем составленным неравенствам, следовательно, можно записать систему

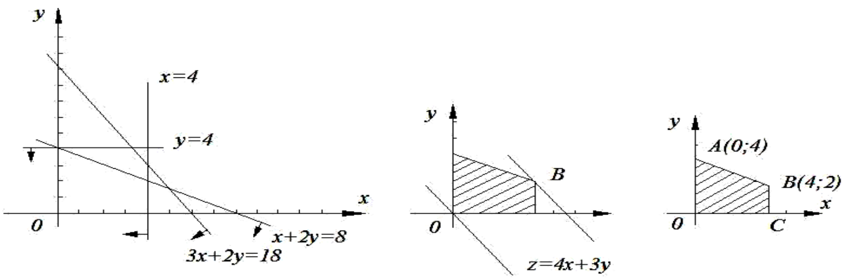
$$\begin{cases} x \le 4, \\ 3x + 2y \le 18, \\ x + 2y \le 8, \\ y \le 4, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0. \end{cases} \qquad (2)$$

По условию задачи за реализацию x домкратов цех получит *4 ед*. прибыли, а за реализацию y опор – *3 ед*., значит, общая прибыль выразится целевой функцией

$$z=4x+3y. \qquad (3)$$

Итак, задача свелась к поиску максимального значения (3) на области (2).

Строим область ограничений (2) (рис.1).



а) б) в)

Рис. 1

Получим замкнутый четырехугольник *OABC*(рисунок 1 (в)). Далее строим график целевой функции (рисунок 1 (б)) и находим его точку выхода из области ограничения *OABC* при движении вверх и вправо. Получим точку*B(4;2)* (рисунок 1 (в)).

Можно действовать иначе: подставляя координаты вершин четырехугольника *OABC* в целевую функцию, найти максимальное значение.

Получаем $z_A = 4\cdot 0 + 3\cdot 4 = 12 ед.,$

$z_B = 4\cdot 4 + 3\cdot 2 = 22 ед.,$

$z_C = 4\cdot 4 + 3\cdot 0 = 16 ед.$

Понятно, что точка *0* с планом *(0;0)* может при проверке не рассматриваться.

В этом случае наибольшая прибыль также соответствует координатам точки*B*, т.е. выпуску *4* домкратов и *2* опор. При этом цех получит максимально возможную прибыль в *22 ед*.

Использование методов линейного программирования может помочь будущему специалисту-технику произвести рациональный раскрой материала. Приведем пример такой задачи.

Задача. Из листов металла размером *1,75*х*1,25 м* требуется выкроить по *1700* заготовок типов А и В размером *0,75*х*0,5* и *1*х*0,25м* соответственно. Необходимо предложить план раскроя, который позволит выполнить задание с наименьшими затратами материала.

Решение. Разумеется, нами будут рассматриваться такие способы раскроя, при которых в отходы идет материал, из которого уже нельзя выкроить ни одной заготовки. На производстве такие способы находят при помощи деревянных шаблонов, вырезанных в форме заготовок, разными способами размещаемых на листе металла. Рассмотрим варианты раскроев (рис.2).

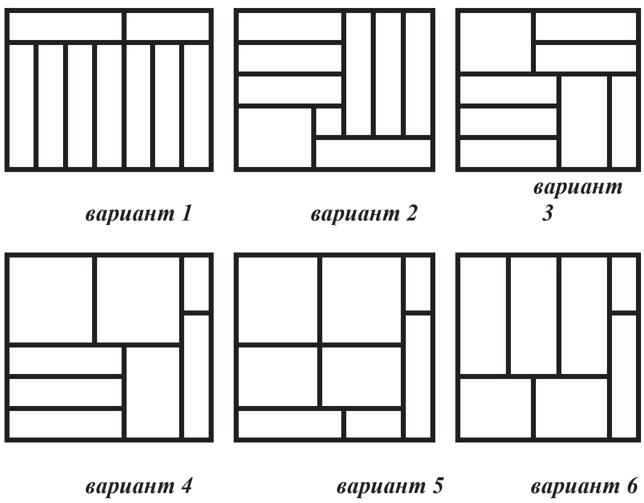


Рис. 2

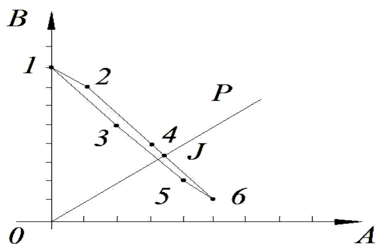


Рис.3

Обозначим $x_i, \quad i = 1,...,6$ – количество листов металла, раскраиваемых i-ым способом. Значит, задача сводится к нахождению значений x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, которые показывают количество листов, раскраиваемых данным способом.

Выясняем, от чего зависят выбранные переменные. Например, лист раскраивается третьим способом. Получим $2x_3$ заготовок типа А и $5x_3$ заготовок типа В. Значит план по заготовкам типа А и В можно записать неравенствами $0x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 5x_6 \geq 100,$

$$8x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 1x_6 \geq 100.$$

Кроме того, $x_i > 0, \quad i = \overline{1,6}$, т.к. нельзя раскроить отрицательное количество листов. Сумма раскраиваемых листов должна быть наименьшей.

Окончательно приходим к такой математической задаче:

Найти $z = min\{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6\}$

на области
$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 5x_6 \geq 100, \\ 8x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 2x_5 + x_6 \geq 100, \\ x_i > 0, \quad i = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача по поиску рационального раскроя сведена к задаче линейного программирования. Решим ее графическим методом. Изобразим прямо-угольную систему координат *AOB*, где координата*A* – число заготовок типа А, координата *B* – соответственно, число заготовок типа В, получаемых при данном раскрое. Точки, соответствующие раскроям, будем обозначать их номерами (рисунок 3). Отрезки, например, [*2,4*], указывают координатами точек им принадлежащим, количество заготовок типовА и В, приходящихся на *1* лист материала в планах раскроя, представляющих комбинации раскроев *2* и *4*.

Из всех осуществимых планов нас интересуют планы с условием комплектности, т.е. *A=B=1700*. Геометрически эти планы обозначаются точками, лежащими на луче *OP*– биссектрисе первой координатной четверти. Оптимальный план раскроя будет выражать точка, принадлежащая отрезку области ограничения и лучу *OP*, которая имеет наибольшие координаты, т.е. наибольшее количество заготовок на один лист раскроя. Такой точкой оказывается точка *J*, лежащая на отрезке [*4,6*]. Значит оптимальный план – комплекс раскроев *4* и *6*. Для точного получения координат точки *J* воспользуемся условием комплектности:

$$\frac{3x + 4(1-x)}{5x + 1(1-x)} = 1,$$

где*x* – часть листа, раскраиваемая по типу 4, оставшаяся часть, раскраиваемая по типу 6, находится как 3x+3(*1– x)*=5x.

Решив уравнение, получаем *x=0,6*.

Далее находим минимальное число листов металла *N*, достаточных для выполнения плана. *N* будет получено, например, из условия нахождения заготовок типа В:

$$0{,}6 \cdot 5N + 0{,}4N = 1700,$$

откуда *N=500.*

Раскроям соответствуют *0,6N* и *0,4N*, значит *300* и *200* листов соответственно.

Следовательно, для получения оптимального плана необходимо раскроить *300* листов раскроем типа *4* и *200* листов раскроем типа *6*.

При помощи построения и исследования рассматриваемых моделей линейного программирования можно обучить учащихся нахождению оптимального плана перевозок. В общем виде задача нахождения такого плана выглядит следующим образом.

Имеется *m* предприятий $A_1, A_2, \ldots, A_m$, производящих один и тот же продукт в количествах, равных соответственно $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Есть и *n* потребителей этого продукта, находящихся в пунктах $B_1, B_2, \ldots, B_n$, причем известны их потребности в этом продукте, равные $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Предполагается, что суммарный объем потребления равен суммарному объему выпуска продукта. Перевозка продукта из *i*-ого предприятия к *g*-му потребителю ведет к затратам, которые обозначим c_{ig}. Все величины c_{ig} считаются заданными. В этих условиях требуется определить план перевозок, который принесет наименьшие затраты на перевозки.

Строим математическую модель этой ситуации. Через x_{ig} обозначим количество продукта, перевозимого от *i*-ого предприятия к *g*-му потребителю. Выпишем ограничения, которым должны удовлетворять введенные величины. В первую очередь, каждый потребитель должен получить ровно столько, сколько ему требуется:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ig} = b_g, \ g = \overline{1,n} \ . \quad (4)$$

Далее, так как потребление равно производству, то с каждого предприятия продукт должен вывозиться полностью:

$$\sum_{g=1}^{n} x_{ig} = a_i, \ i = \overline{1,m}. \quad (5)$$

Перевозимые количества продукта не могут быть отрицательными:

$$x_{ig} \geq 0, \quad i = \overline{1,m}; \quad g = \overline{1,n}. \quad (6)$$

Целевой функцией, подлежащей минимизации, выступают суммарные затраты на перевозку, определяемые формулой

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{g=1}^{n} c_{ig} x_{ig} \ .$$

Окончательно приходим к такой задаче:

Найти $$min \sum_{i=1}^{m} \sum_{g=1}^{n} c_{ig} x_{ig}$$

при условиях: (4), (5), (6).

Полученная задача является задачей линейного программирования. Из-за специфичности ограничений (4) и (5), задачи этого типа получили название транспортных задач. Рассмотрим содержание признака оптимальности для поставленной задачи.

Обозначим оценку единицы продукта на *i*-ом предприятии через u_i, а v_g – оценку единицы продукции у *g*-го потребителя.

РЕЗУЛЬТАТ. Признак оптимальности плана перевозок представит собой очевидную истину: при осуществлении перевозки цена в пункте потребления равна цене в пункте производства плюс транспортные расходы: в любом пункте потребления v_g не может быть больше, чем $u_i + c_{ig}$, где c_{ig} – транспортные расходы на перевозку этого продукта из другого пункта производства.

ВЫВОД. Следовательно, в оптимальном плане $v_g \leq u_i + c_{ig}$, т.е. разность цен не превышает затрат на транспортировку. На основании этого признака можно не только проверить любой допустимый план на оптимальность, но и перейти к лучшему.

REFERENCES

Потоцкий М.В. О психологических основах методики обучения математике// Математика в школе. – 1961. № 6.

Казаков В.Г., Кондратьева Л.Л. Психология: Учебник для индустриально-педагогических техникумов. – М.: Высш. шк., 1989.

Каменская Е.Н. Психология развития и возрастная психология. Конспект лекций. – Ростов н/Д: Феникс, 2006. – 224 с.

Столяренко Л.Д. Педагогическая психология. – 2-е изд., перераб. и доп. – Ростов н/Д: Феникс, 2003.

M.F. Atoyeva. Use of Periodicity in Teaching Physics. Eastern European Scientific Journal. – Düsseldorf-Germany, 2017. № 4. –P. 35-39.

M.F. Atoyeva. Didactic foundations of inter-media relations in the training of university students. International Scientific Journal. Theoretical & Applied Science. p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online). Year: 2020 Issue: 06 Volume: 86, P. 124.

M.F. Atoyeva. Pedagogical Tests As An Element Of Types Of Pedagogical Technologies. The American Journal of Applied Sciences, 2(09), (TAJAS) SJIF-5.276 DOI-10.37547/tajas Volume 2 Issue 9, 19.09.2020. ISSN 2689-09. 92 The USA Journals, USA www.usajournalshub.com/index.php/tajas 164-169. Имп.5.2.

Maqsudova M.U., Bozorova V.M., Linguocultural and pragmatic factors of Abdulla Kodiri's " Mehrobdan Chayon "in English translation, Actual problems of modern science education and training . Februry ,2020 ISSN 2181 9750.

Maqsudova M.U., Theoretical Foundations and Scientific Analysis of Characters Illustratiohs I in the works of Charles Dickens and William Thackerey, International Scientific Journal . Theoretical & Applied Science.Volume:77. Issue 09.2019 http://T-Science.org.

Maqsudova M.U., Bozorova V.M. ,V.F.Kamoliddinova, Pedagogical Process of Teaching in Higher Education Institutions, International Journal of Recent Technology and Engineering.ISSN 2277-3878 Website.WWW.IJRTE-org. Volume-8 Issue 38,October 2019. P.179-182.