АЛГЕБРАИК ВА ГЕОМЕТРИК МЕТОДЛАР ИНТЕГРАЦИЯСИ ШАРТИДА ЭКСТРЕМАЛ МАСАЛАЛАРНИ ЕЧИШ МЕТОДЛАРИ

МЕТОДИ РЕШЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ В УСЛОВИЯХ ИНТЕГРАЦИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО И ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МЕТОДОВ

TECHNIQUE FOR SOLVING EXTREMAL PROBLEMS UNDER THE CONDITIONS OF INTEGRATION OF ALGEBRAIC AND GEOMETRIC METHODS.

Saipnazarov Shaylovbek Aktamovich
Associate Professor, Candidate of Pedagogical Sciences, UZBEKISTAN E

Saidova Munirajon Yuldash qizi
Tashkent University of Economics, UZBEKISTAN

Omonov Alisher Toshpo'lat o'g'li Tashkent University of Economics, UZBEKISTAN Email id: alisher.omonov1992@mail.ru

Аннотация. Бу мақолада алгебраик ва геометрик методлар интеграцияси шартида иқтисодий масала танланиб уни алгебра ва геометрия тилига ўтказилган, ҳамда уларни ечишда алгебраик, геометрик, координаталар методи ва математик таҳлил методлари ёрдамида ечилади. Шунингдек мақолада математика ва унинг методлари абстракт бўлишига қарамай унинг кўпгина тармоқлари амалий тадбиқ қилиниши кўрсатилган.

Таянч сўзлар. Рентабеллик, фойда, харажат, таннарх, нарх, бюджет чизиғи, координаталар методи, математик таҳлил методи.

Аннотация. В данной статье в условиях интеграции алгебраических и геометрических методов выбрана экономическая задача и переведена на язык алгебры и геометрии, а также решена при помощи алгебраических, геометрических методов, метода координат и методов математического анализа. В статье также показано, что несмотря на абстрактность математики и её методов, многие её отрасли имеют практическое применение.

Ключевые слова. Рентабельность, прибыль, затраты, себестоимость, цена, бюджетная линия, метод координат, метод математического анализа.

Abstract. In this article, under the conditions of integration of algebraic and geometric methods, an economic problem is chosen and translated into the language of algebra and geometry, and also solved using algebraic, geometric methods, the method of coordinates and methods of mathematical analysis. The article also shows that despite the abstract nature of mathematics and its methods, many of its branches have practical applications.

Keywords. Profitability, profit, cost, budget line, coordinate method, method of mathematical analysis.

Кириш. Алгебраик ва геометрик методлар интеграциясининг зарурлиги на фақат илмни мантиқан ривожлантириш, балки замонавий мутахасисни касбий маҳоратини шакллантиришга ҳамёрдам беради. Янги компьютер ва ахборот технологияларини фаол тарғиб қилиш шароитида олинган билимларни тадбиқ этиш, олинган натижаларни умумлаштириш, катта сондаги турли компонентларни бирлаштириш талаб қилинади.

Ўрта мактаб математик иккита такомиллаштириш жараёнида иккита қарамақаршилик – дифференцация ва интеграцияни бирлаштириш кузатилишини гувоҳи бўламиз.

Академик В.С.Леднев фикрича ўрта таълимда дифференциация ўзининг чегарасига етиб бўлган ва уни интеграция йўлибилан намоён қилинади, яъни баъзи янги курсларни киритиш бошқа янги курсларни киритиш бошқа курсларни қисқартириш йўли билан бирлашишни, аммо уларни интеграция асосида бирлаштириш йўли билан амалга ошириш керак [1, с. 52].

Бизнинг фикримизча олий таълимда математик фанлар амалиёт билан интеграцияланиши лозим.

Педагогик тадқиқотларда амалиётга йўналтириш деганда математика курсини мазмун жиҳатдан амалиёт билан боғланиши тушунилади. Баъзи тадқиқотчилар амалий масалаларни табиий тилдан математика тилига ўтиш деб ҳисоблайдилар.

Бизнинг фикримизча амалиёт масаласи – бу математика ташқарисида қўйилган масала ва математик методлар ёрдамида ечиладиган масаладир. Амалиётга йўналтириш масалаларидан бири иқтисод масаласидир.

Математик фанларнинг келиб чиқиши, шубҳасиз, иқтисод эҳтиёжлари билан боғлиқ бўлган. Масалан, қанча майдонга дон сепиш, оилани тўқ тутиш учун зарур экин майдонини қандай қилиб ўлчаш ва олинажак ҳосилни чамалаб баҳолаш зарур бўлган.

Ишлаб чиқаришнинг тараққиёти ва мураккаблашиши билан иқтисоднинг математик ҳисоблашларга бўлган эҳтиёжи ортиб борди. Ҳозирги ишлаб чиқариш – кўплаб корхоналарнинг қатъий мувозанатга солинган фаолиятидан иборатки, у беҳисоб математик масалаларни ечиш билан таъминланади. Бу иш билан иқтисодчилар, режа тузувчилар ва бухгалтерларнинг бир бутун армияси машғул, минглаб электрон ҳисоблаш машиналари эса ҳисоб – китоблар билан банд. Бундай масалалар қаторига ишлаб чиқариш режасини тузиш ҳам, қурилиш объектларининг энг афзал жойлашувини аниқлаш ҳам, юк ташишнинг энг тежамли маршрутларини танлаш ҳам киради.

Бундай турдаги масалаларни ечиш билан “Бизнес математика” фани шуғулланади. Бизнес математика, шунингдек, аввалдан маълум иқтисодий ҳодисаларнинг моделлаштирилган математик тавсифи, иқтисодий-ҳисоб китоблардаги турли гипотезаларнинг таҳлили, уларни ифодаловчи математик муносабатлар билан ҳам шуғулланади.

Баъзи иқтисодий кўрсаткичлар ва улар орасидаги боғланишларни киритамиз. Агар фойда рентабеллик, харажат, маҳсулот миқдори, маҳсулотнинг бирлик нархи таннарх бўлса, у ҳолда

$$\pi = p \cdot n - X$$

$$R = \frac{\pi}{X} = \frac{Pn - X}{X} = \frac{P \cdot n}{X} - 1 \quad (1)$$

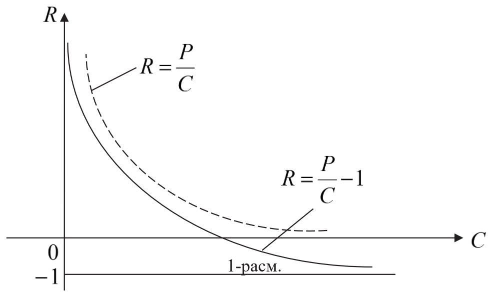
$$C = \frac{X}{n} \quad (2)$$

бўлганлигидан

$$R = \frac{P}{C} - 1 \quad (3)$$

ҳосил қиламиз.

(3) формула кўргазмали геометрик талқинга эга (1-расм)



1-расм.

(3) формуладан таннархни минималлаштириш рентабелликни максимллаштиришга эквивалент бўлади.

Агар,

1) $C<P$ бўлса, у ҳолда (корхона рентабель),
2) $C=P$ бўлса, у ҳолда $R=0$,
3) $C>P$ бўлса, у ҳолда $R<0$(корхона норентабель)

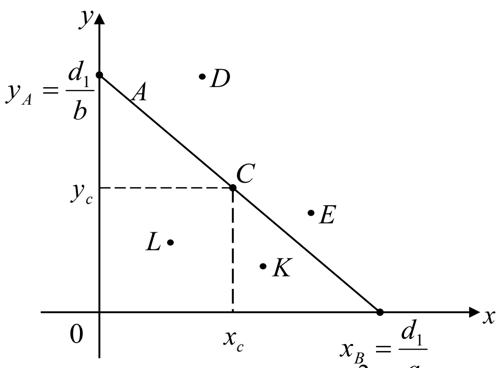
Рентабелликни ёки гектарига олинадиган фойдани максималлаштириш учун каср чизиқли функцияни максималлаштириш қоидасидан фойдаланилади.

1. Амалий масалаларни ечишда алгебраик ва геометрик методлар интеграциясининг роли

Қуйидаги содда масалани қараймиз. Фараз қилайлик, харидор 2 хил товарни сотиб олишни афзал кўрсин. Харидорнинг берилган вақт ичидаги даромади d бўлсин. Харидор берилган вақт ичида d пул бирлигидан юқори пул сарфлаши мумкин эмас. У ҳолда $ax+by=d$ $(d_1<d)$ (4) шартни қаноатлантирувчи $(x;y)$ товарлар тўпламидан харид қилиш мумкин. Товарлар тўпламини тўғри бурчакли координата (товарлар текислигида) график равишда тасвирлаш учун (4) тенгликдан фойдаланиш қулай (бунда x – товарнинг нархи a, y - товарнинг нархи b). (4) тенглама билан аниқланадиган чизиқ иқтисод курсида бюджет (нарх) чизиғи деб юритилади.

$$y=\frac{d_1}{b}-\frac{a}{b}x \qquad (5)$$

d_1, a, b ўзгармас катталиклар бўлгани учун (5) тенглама тўғри чизиқни ифодалайди, бунда $\frac{d_1}{b}$ озод ҳад, $\frac{a}{b}$ эса x ўзгарувчи олдидаги коэффициент. Бюджет чизиғи графикда AB тўғри чизиқдан иборат. A ва B нуқталарнинг координаталари бюджет чизиғи билан координата ўқларининг кесишган нуқталари.



2-расм.

A нуқта ординатаси $y_A=\frac{d_1}{b}$ харидорнинг фақат x товарни қилишини, B нуқта абсциссаси $x_B=\frac{d_1}{a}$ эса харидор фақат y товар учун ўз даромадини сарфлаганлигини билдиради. $C(x_c, y_c)$ нуқта эса харидор ўз даромадининг x ва y товарлар учун сарфлаганлигини билдиради. OAB учбурчак харидорнинг товарни сотиб олиш имкониятлар тўпламини билдиради.

Учбурчак ичига тегишли бўлган K ва L нуқталар харидорнинг x ва y товарларнинг сотиб олишга имкони борлигини билдирса, D ва E нуқталарда x ва y товарларни сотиб олишга имкони бўлмаганлигини билдиради. Агар харидорнинг даромади d_1 дан d_2 гача ортса ва нархлар ўзгармай қолса, у ҳолда янги бюджет чизиғининг тенгламаси

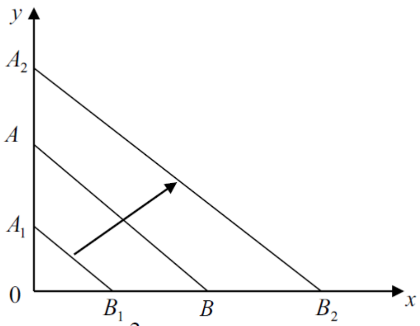
$$y=\frac{d_2}{b}-\frac{d_1}{b}x \qquad (6)$$

кўринишга эга бўлади. Ҳақиқатан, $d_2=d_1+d$ $\quad (L>0,\ \alpha\in R)$ бўлгпнлиги учун

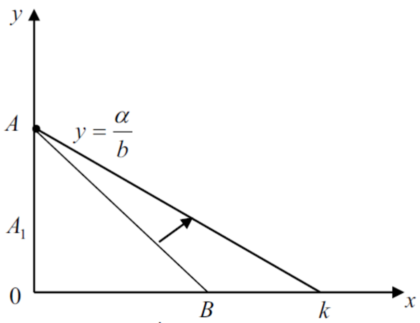
$$y=\frac{d_2+\alpha}{b}-\frac{d_1}{b}x=\frac{d_1}{b}-\frac{d_1}{b}x+\frac{\alpha}{b}$$

$$x=\frac{d_1+\alpha}{a}-\frac{b}{a}y=\frac{d_1}{a}-\frac{b}{a}y+\frac{\alpha}{a}$$

формулалалар ҳосил бўлади. бу формулалар параллел кўчириш формулалари бўлганлиги учун бюджет чизиғи даромад ўсганда бюджет чизиғининг юқорига, даромад камайганда эса пастга параллел кўчишни кўрсатади.



3-расм.



4-расм.

Энди фақат битта товар нархини ўзгартиришни α гача текширайлик. Аниқлик учун x товарнинг нархи a камайган бўлиб, y товарнинг нархи ва харидорнинг даромади ўзгармай қолсин. Бундай ҳолда бюджет чизиғи

$$y=\frac{\alpha}{b}-\frac{a}{b}x$$

кўринишда бўлади.

шундай қилиб, x товар нархининг камайиши бюджет чизиғини соат стрелкаси йўналишига бюджет чизиғининг $0y$ ўқи билан кесишган нуқтаси атрофида буришга олиб келар экан, x товар нархининг ўсиши юқоридагига ўхшаш соат стрелкаси йўналиши бўйича бурилади.

Масала: Харидор 2 хил (2;5) ёки (4;3) жуфтликлардаги товарлар тўпламини сотиб олиш маълум бўлса, бюджет чизиғи қандай кўринишга эга бўлади? Агар бирлик нарх 100000 сўм бўлса, харидорнинг даромади неча сўмни ташкил этади?

Ечиш: Бу иқтисодий масалани математика тилида қуйидагича баён қиламиз. Берилган икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси тузилсин. Тўғри чизиқ тенгламасини $ax+by=c$ кўринишда излаймиз. Тўғри чизиқ (2;5) ва (4;3) нуқталардан ўтганлиги учун ушбу системани ечамиз:

$$\begin{cases} 2a+5b=c \\ 4a+3b=c \end{cases}$$

Системани ечиб, $a=b, c=7b$ эканлигини топамиз. Демак, бюджет чизиғи $x+y=7$ кўринишда бўлади.

Энди масаланинг иқтисодий маъносига қайтамиз. Товарларнинг нархлари тенг. Товар нархларининг қиймати 100000 сўм ташкил этади. Харидорнинг даромади 700 000 сўмдан иборат. Бундай турдаги масала талабанинг фақат иқтисодий тафаккуринигина эмас, балки геометрик фикрланишини ҳам ўстиради.

Математика фанини ўқитишда асосий эътироф уни амалиёт билан узвий боғланган ҳолда олиб боришга қаратилиши зарур.

Айниқса, иқтисодиёт, қурилиш, архитектура ва бошқа йўналишлар негизида математика ётганлигини ҳар бир тингловчи ўқув жараёнида тадбиқ этиши керак.

2. Экстремал масалаларни ечишда алгебраик, геометрик методлар интеграциясидан фойдаланиш

Масалалар қараймиз:

1-мисол. Ушбу функциянинг энг кичик қийматини топинг.

$$f(x)=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-3\sqrt{3}x+9}$$

Ечиш. 1) Математик таҳлил методи

Берилган функциядан биринчи тартибли ҳосила оламиз ва уни нолга тенглаб, стационар нуқталар атрофида ҳосила ишорасини ўзгаришига қараб функциянинг минимумини топамиз.

$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}+\frac{2x-3\sqrt{3}}{2\sqrt{x^2-3\sqrt{3}x+9}}=0 \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2x\sqrt{x^2-3\sqrt{3}x+9}+\left(2x-3\sqrt{3}\right)\sqrt{x^2+4}=0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 4x^2\left(2x^2-3\sqrt{3}x+9\right)=\left(4x^2-12\sqrt{3}x+27\right)\left(x^2+4\right) \quad \Rightarrow$$

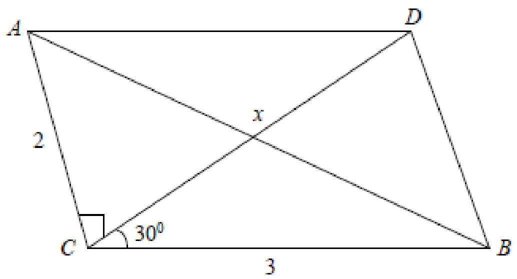
$$\Rightarrow \quad 36x^2=43x^2-48\sqrt{3}x+108$$

$$7x^2-48\sqrt{3}+108=0$$

$$x_{1,2}=\frac{48\sqrt{3}\pm36\sqrt{3}}{14}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\dfrac{6\sqrt{3}}{7}\\ x_2=6\sqrt{3}\end{array}\right.$$

$$f\left(\frac{6\sqrt{3}}{7}\right)=\frac{4\sqrt{19}}{7}+\frac{3\sqrt{19}}{7}=\sqrt{19} \quad \to \min$$

2) Геометрик усул. Маълумки, илдиз остидаги ифодалар мусбат. Ушбу чизмага қараймиз.



ΔACD - тўғри бурчакли учбурчакда

$AC=2,\ CD=x,\ \angle ACD=90^0,\ AD=\sqrt{x^2+4}$

ΔBCD да эса косинуслар теоремасига асосан $DB=\sqrt{x^2+9-3\sqrt{3}x}$ келиб чиқади.

У ҳолда

$f(x)=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-3\sqrt{3}x+9}=AD+DB=AB\to\min$

ΔABC дан $AB=\sqrt{2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cos120^0}=\sqrt{19}$

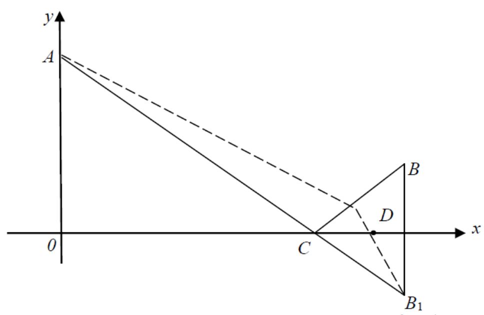
3) Координаталар методи. Берилган функцияни қуйидагича ёзиб оламиз.

$$f(x)=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{\left(x-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}$$

$A(0;2),\ C(x;0)\quad B\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2}\right)$

$B\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2}\right)$ нуқтага абсцисса ўқига нисбатан симметрик $B_1\left(\frac{3\sqrt{3}}{3};-\frac{3}{2}\right)$ нуқтани ясаймиз.

$AC=\sqrt{x^2+4}.\quad BC=\sqrt{x^2-3\sqrt{3}x+9}$



Учбурчак тенгсизлигига кўра AB_1 энг кичик масофа бўлади.

$$\min f(x) = AB_1 = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(2+\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{27}{4}+\sqrt{\frac{49}{4}}} = \sqrt{19}$$

$\overline{AC}$ ва $\overline{CB_1}$ векторларнинг коллинеарлигидан x топамиз.

$$\overline{AC} \uparrow\uparrow \overline{CB_1}$$

$$\overline{AC} = (x;\ -2) \quad \overline{CB_1} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - x;\ -\frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{x}{\frac{3\sqrt{3}}{2} - x} = \frac{4}{3}$$

$$3x = 6\sqrt{3} - 4x,\quad 7x = 6\sqrt{3},\quad x = \frac{6\sqrt{3}}{7}$$

$$\min f(x) = f\left(\frac{6\sqrt{3}}{7}\right) = \sqrt{19}$$

2-мисол. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари a, b гипотезунаси эса C га тенг. Унга ташқи чизилган айлана радиусининг ички чизилган айлана радиусига нисбатининг энг кичик қийматини топинг.

Ечиш. Тўғри бурчакли учбурчакнинг юзини унга ички ва ташқи чизилган айлана радиуслари орқали ифодалаймиз.

$S = r^2 + 2Rr$, иккинчи томондан $S = \frac{a+b+c}{2}\cdot r$. Демак,

$$r^2 + 2Rr = \frac{(a+b+c)\cdot r}{2} = \frac{(c\sin\alpha + c\cos\alpha + c)\cdot r}{2} = \frac{\mathrm{c}(\sin\alpha+\cos\alpha+1)\cdot r}{2} = \frac{2R(\sin\alpha+\cos\alpha+1)}{2} =$$

$$R = (\sin\alpha + \cos\alpha + 1)\cdot r$$

охирги тенгликни ҳар иккала қисмини r^2 га бўламиз ва $\frac{R}{r} = x$ деб белгилаб

$1 + 2x = x(\sin\alpha + \cos\alpha + 1)$ ҳосил қиламиз. Бундан

$$x(\sin\alpha + \cos\alpha + 1) - 2x = 1$$

$$x(\sin\alpha + \cos\alpha + 1 - 2) = 1$$

$$x = \frac{1}{\sin\alpha + \cos\alpha - 1} \geq \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$$

Шундай қилиб,

$$\min\frac{R}{r} = \sqrt{2}+1$$

3-мисол. Қавариқ тўртбурчакнинг учлари 1×1 ўлчовли квадратнинг турли томонларида ётади. Тўртубрчак периметрининг энг кичик қийматини топинг.

Ечиш. Координаталар методини қўллаймиз. Текисликда шундай координаталар системасини киритамизки, бунда квадрат учлари $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ координаталарга эга бўлсин.

Тўртбурчак учларининг координаталари эса $(0, y_1), (x_1, 1), (1, y_2), (x_2, 0)$, бунда $0 \leq x_2 \leq 1,\ 0 \leq y_i \leq 1$. У Ҳолда тўртбурчакнинг периметри

$$P = \sqrt{x_1^2 + (1+y_1)^2} + \sqrt{(1-x_1)^2 + (1-y_2)^2} + \sqrt{(1-x_2)^2 + y_2^2} + \sqrt{x_2^2 + y_1^2}$$

$a^2 + b^2 \geq 2ab$ тенгсизликнинг ҳар иккала қисмига $a^2 + b^2$ ни қўшиб ва ҳосил бўлган тенгсизликни ҳар иккала қисмини 2 га бўлиб $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$ ни ҳосил қиламиз. Бундан $\sqrt{a^2+b^2} \geq \frac{a+b}{\sqrt{2}}$ охирги тенгсизликниҳосил қилинган тўртбурчак периметрини ҳисоблаш форммуласига тадбиқ этамиз.

$$\sqrt{x_1^2 + (1-y_1)^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + 1 - y_1)$$

$$\sqrt{(1-x_1)^2 + (1-y_2)^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - x_1 + 1 - y_2)$$

$$\sqrt{(1-x_1)^2+y_2^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(1-x_1+y_2)$$

$$\sqrt{x_2^2+y_1^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2+y_1)$$

Уларни ҳадлаб қўшиб, ушбуни ҳосил қиламиз.

$$P \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+1-y_1+1-x_1+1-y_2+1-x_2+y_2+x_2+y_1)=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

Демак, $P_{\min}=2\sqrt{2}$.

Координаталар методи ёрдамида кўплаб ностандарт масалаларни осон ҳал қилиш мумкин. Айниқса, стреометриянинг ностандарт масалаларини ечишда координаталар ва вектор методлари қўл келади.

Хулоса. Ушбу мақолада алгебраик ва геометрик методлар интеграцияси шартида математик таҳлил, тригонометрия ва аналитик геометрия масалаларидан фойдаланилди. Экстремумга оид шундай масалалар мавжудки, уларни классик методдан фойдаланиб ечиш жуда ноқулай. Шунинг учун математик методлар интеграцияси зарур. Айниқса, иқтисод, қурулишга оид масалаларни математик методлар интеграциясини қўллаш жуда қўл келади. Алгебраик ва геометрик методлар интеграцияси талабаларни математик методларни эгаллашларига ва уларнинг математик мантиқ элементларини такомиллашишига ёрдам беради. Амалий дарсларда талабаларнинг иқтисодий билимларини ривожлантириш ва такомиллаштиришда масалаларни шундай танлаш керакки, бу масала иложи борича ҳаётдан олинган бўлиши лозим. Бундай масалаларни математик моделини тузиб, уларни ечиш методлари танланади.

Адабиётлар

1. В.С. Леднев Содержание образования: сущность, структура, перспективы,-2-е изд.-М.: Высш.шк., 1991.-224с.

2.Абдуллаев Рустамжон “Интеллектуальный мир, модель экономического пространства и законы идеальной экономики” М.: 1995.

3. Ш.А.Саипназаров, Д.Т. Салимов, Д.М. Азимов, Н.М. Алиев “Математика для экономистов”. Учебное пособие. Ташкент. 2022.

4. Sh.A. Saipnazarov, M.T. Ortiqova, J.A. Usarov. “Moliyaviy matematika”. T.: 2022.

5. Новиков А.И. Экономико – математические методы и модели: Учебник для бакалавров. М.: 2020.

6. G. Jay Kerns, Introduction to Probability and statistics Using R, - G. Jay Kerns, 2010.

7. Laurence D. Hoffmann, Gerald Bradlay, “Finite Mathematics with calculus”, - USA. MeGraw-Hill, 1995.