TARMOQLANGAN TUZILMALARDA ISSIQLIK TARQALISHI: METRIK GRAFIK ASOSIDAGI YONDASHUV

Xashimova Feruza Saidovna,
Navoiy davlat konchilik va texnologiyalar unversiteti «Umumiy fizika» kafedrasi katta o'qituvchisi

Jo'raqulovich Zafar Xusanov,
pedagogika fanlari falsafa doktori (Phd) Navoiy davlat konchilik va texnologiyalar universiteti "Umumiy fizika" kafedrasi dotsenti

ТЕПЛООТДАЧА В СЕТЕВЫХ КОНСТРУКЦИЯХ: МЕТРИЧЕСКИЙ ГРАФИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Хашимова Феруза Саидовна,
Старший преподователь кафедры "Общая физика" Навоийского государственного горно-технологического университета

Журакулович Зафар Хусанов
доктор философских наук (PhD) доцент кафедры "Общая физика" Навоийского государственного горно-технологического университета

HEAT TRANSFER IN NETWORK STRUCTURES: A METRIC GRAPHIC APPROACH

Xashimova Feruza Saidovna,
Senior teacher of the Department of «General Physics» of the Navoi State University of Mining and Technology

Khusanov Zafar Jurakulovich.
doctor of philosophy in Pedagogical Sciences (Phd) Navoi State University of mining and Technology associate professor of the Department of General Physics

Annotatciya: Maqolada tarmoqlangan tuzilmalarda issiqlik tarqalishi: metrik grafik asosidagi yondashuv bilan bog'liq masalalar ko'rib chiqiladi. Tarmoqlangan tizimlar va tarmoqlarda issiqlik tarqalishi muammosini metrik grafiklarda issiqlik o'tkazuvchanligi tenglamasi nuqtai nazaridan tasvirlangan model asosida ko'rib chiqamiz. Aniq analitik yechimlaridan foydalanib, har bir tarmoqdagi harorat holati va issiqlik oqimining ozgarishi hisoblanadi. Nochiziqli rejim uchun tadqiqotni kengaytirish metrik grafiklarda nochiziqli issiqlik tenglamasidan foydalangan holda ko'rib chiqiladi. Nochiziqli rejimda chiziqli holatga qaraganda intensivroq ekanligi aniqlandi.

Kalit so'zlar: Fizika, fan o'qitish, tarmoqlangan tuzilmalar, issiqlik tarqalishi, metrik grafiklar, issiqlik oqimi, o'quv samaradorligi.

Аннотация: В статье рассматриваются вопросы, связанные с отводом тепла в разветвленных структурах: подход на основе метрических графов. Рассмотрена задача распределения тепла в сетевых системах и сетях на основе модели, описываемой уравнением теплообмена в метрических графах. С помощью точных аналитических решений рассчитываются температурное состояние и изменения теплового потока в каждой сети. Рассмотрено расширение исследования для нелинейного режима с использованием нелинейного уравнения теплопроводности в метрических графиках. Оказалось, что в нелинейном режиме она более интенсивна, чем в линейном.

Ключевые слова: физика, преподавание естественных наук, разветвленные структуры, тепловыделение, метрические графы, тепловой поток, *эффективность обучения.*

Abstract: The article deals with issues related to heat removal in branched structures: an approach based on metric graphs. The problem of heat distribution in network systems and networks is considered on the basis of a model described by the heat transfer equation in metric graphs. With the help of accurate analytical solutions, the temperature state and changes in the heat flow in each network are calculated. An extension of the study for a nonlinear regime using a nonlinear heat equation in metric graphs is considered. It turned out that in the nonlinear regime it is more intense than in the linear one.

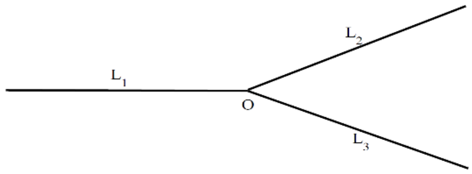
Keywords: physics, science teaching, branched structures, heat generation, metric graphs, heat flow, learning efficiency.

KIRISH. Kichik o‘lchamli tarvaqaylab ketgan tuzilmalarda zarrachalar va to‘lqinlar tashish turli xil texnologik sohalar uchun muhimdir. Diskret tuzilmalar, tarmoqlar va tarmoqlangan tizimlarning boshqa turlari makro, mikro va hattoki nano o‘lchamdagi ko‘plab materiallar va qurilmalarning bir qismi sifatida paydo bo‘ladi. Qurilmalarni sozlash, optimallashtirish va boshqarish funktsiyalari bunday tarmoqlangan tuzilmalardagi to‘lqin hodisalarini chuqur tushunishni va ushbu hodisalarni samarali, maksimal darajada real modellashtirishni talab qiladi. Shu kabi modellashtirish uchun oddiy va kuchli yondashuvlardan foydalanishni talab qiladi. Bunday yondashuvlardan biri metrik grafiklar deb ataladigan turli to‘lqinli (qisman differensial) tenglamalardan foydalanishga asoslangan. Grafikning o‘zi grafik topologiyasi deb ataladigan ma’lum bir qoidaga ko‘ra cho‘qqilarda (tarmoqlanish nuqtalarida) bir-biriga bog‘langan bog‘lanishlar to‘plami sifatida aniqlanadi. Grafikning bog‘lanishlariga uzunlik berilgan bo‘lsa, u metrik grafik deb ataladi. Grafik ko‘rinishi qo‘sh matritsasi bo‘yicha berilgan, uni quyidagicha yozish mumkin: [1, 4]:

$$C_{ij} = C_{ji} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \qquad \text{i, j} = 1,2,\ldots,\text{V}.$$

Metrik grafiklar yordamida tarmoqlangan tizimlarda to‘lqin dinamikasini o‘rganishni ikki holatga bo‘lish mumkin: chiziqli va nochiziqli rejimlarda to‘lqinlarning tashuvchisi. Tarmoqlangan tizimlarda chiziqli to‘lqinlarni o‘rganish asosan Shredinger tenglamasi nuqtai nazaridan tasvirlangan metrik grafiklar “kvant grafiklari” deb ataladi. Tarmoqlangan tizimlarda kvant mexanik harakatining o‘rganish talqinlari bir necha o‘n yillar oldin ko‘rib chiqilgan. [7]-[9]. Shu bilan birga, kvant grafiklarini o‘rganish birinchi bo‘lib Eksner, Seba va Stovichek tomonidan tarmoqlangan tizimlarda erkin kvant harakatini tasvirlash uchun taqdim etilgan[10]. Keyinchalik Kostrikin va Shreder grafiklarda Shredinger operatorining o‘z-o‘zidan qo‘shilishini ta‘minlovchi umumiy chegara shartlarini keltirib chiqardilar[11]. Bolt va Xarrison metrik grafiklarda Dirak operatori uchun bunday chegara shartlarini kengaytirdilar[12]. Xul optik mikroto‘lqinli tarmoqlarda kvant grafiklarining eksperimental amalga oshirilishini ko‘rib chiqdilar[2]. Kvant grafiklari bilan bog‘liq muhim mavzu kvant xaos nazariyasi va spektral statistikaida o‘rganildi[1,4,12-14]. Davriy kvant grafiklarining spektral xossalari va tarmoqli tuzilishi ham katta qiziqish uyg‘otdi. Shredinger operatorlarining grafiklardagi turli jihatlari o‘rganilgan. [6]. Kvant grafiklarini o‘rganishda erishilgan katta yutuqlarga qaramay, adabiyotlarda grafiklardagi qisman differensial tenglamalarning ba‘zi matematik jihatlari ko‘rib chiqilgan bo‘lsada, metrik grafiklardagi boshqa to‘lqin tenglamalari hamon e‘tibordan chetda qolmoqda. Metrik grafiklarda integrallanadigan nochiziqli evolyutsiya tenglamalari bilan tavsiflangan tarmoqlangan tizimlardagi nochiziqli to‘lqinlar dinamikasi so‘nggi o‘n yillikda katta e’tiborni tortdi.

Ushbu maqolada metrik grafiklarda chiziqli va nochiziqli issiqlik tenglamalari nuqtai nazaridan modellashtirilgan tarmoqlangan tizimlardagi issiqlik to‘lqinlarining dinamikasini ko‘rib chiqamiz. Bunday model tarmoqlangan polimerlarda, uglerodli nanotrubkali tarmoqlarida va kondensatsiyalangan moddalar fizikasida paydo bo‘ladigan har qanday past o‘lchamli tarmoqlangan tuzilmalarda klassik (kvant bo‘lmagan) issiqlik tarqalishini tasvirlash uchun ishlatilishi mumkin.



1-rasm: Metrik yulduz grafigi. Lj -tarmoqning uzunligi, j=1,2,3

2. TARMOQLARDA CHIZIQLI ISSIQLIK DIFFUZIYASI

Bizning maqsadimiz metrik grafiklarda issiqlik tenglamasidan foydalangan holda tarmoqlangan tuzilmalarda issiqlik tarqalishini modellashtirishdir. Ikkinchisining yechimini chekli oraliqda issiqlik tenglamasi yordamida qurish mumkin. Shu sababli metrik grafik uchun masalani shakllantirishdan oldin chekli oraliqdagi (0;l) issiqlik tenglamasining yechimini ifodalanishi(cp=1, ρ=1bilan) tomonidan berilgan.

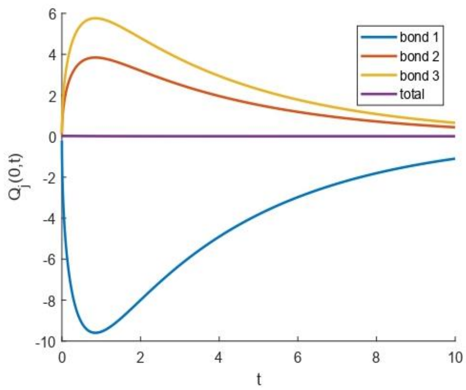
$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x \in (0, \ell) \quad (2.1)$$

Bu erda u(x, t) harorat holat funksiyasi, κ^2 issiqlik o'tkazuvchanligi.

(2.1) tenglamaning umumiy yechimini olish mumkin.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{\pi^2 k^2 n^2}{\ell^2}} \sin\left(\frac{\pi n}{\ell} x\right), \quad (2.2)$$

Quyida bu yechimdan issiqlik tenglamasining yechimmini chekli bog'langan metrik grafiklarda qurish uchun foydalaniladi. Grafiklardagi issiqlik tenglamasining matematik jihatlari ilgari ko'rib chiqilganligini ta'kidlaymiz. Bu erda biz metrik grafikdagi issiqlik tenglamasining aniq yechimini olamiz va uni tarmoqlarda issiqlik tarqalishini modellashtirish uchun qo'llaymiz.



2-rasm:

Tenglamada tasvirlangan yulduz grafigining har bir bog'lanishidan hisoblangan erteksdagi issiqlik oqimining vaqtga bog'liqligi.

Issiqlik tarqalishining muhim xarakteristikasi issiqlik oqimi sifatida aniqlanadi:

$$Q_j(x,t) = -k_j^2 \frac{\partial u_j}{\partial x}.$$

2-rasmdan ko‘rish mumkin, bu erda issiqlik oqimining cho‘qqidagi vaqtga bog‘liqligi Qj (0, t) shakldagi kabi kj va Lj qiymatlari uchun chizilgan.

3. NOCHIZIQLI REJIMDA ISSIQLIK DIFFUZIYASI

Tarmoqlarda chiziqli issiqlik tarqalishining yuqoridagi modeli metrik grafikda nochiziqli issiqlik tenglamasidan foydalangan holda nochiziqli rejim holatiga kengaytirilishi mumkin. Bu erda biz buni uchta yarim cheksiz bog‘langan yulduz grafigi uchun ko‘rsatamiz. Yulduzli grafikda quyidagi nochiziqli issiqlik tenglamasini holda ko‘rib chiqamiz

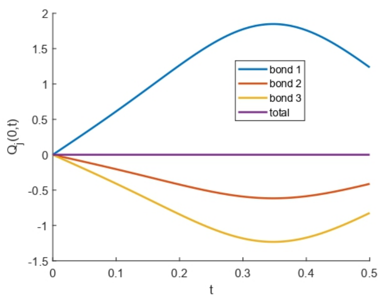
$b_1 \sim (-\infty;0), b_{2,3} \sim (0;+\infty)$:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} - k_j^2 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} = -2\beta_j^2 u_j^3, x \in b_j, t > 0 \qquad (3.1)$$

cho‘qqi uchun chegara shartlari quyidagicha ifodalanadi

$$\beta_1 u_1(0,t) = \beta_2 u_2(0,t) = \beta_3 u_3(0,t),$$

$$k_1^2 \frac{\partial u_1}{\partial x}|_{x=0} = k_2^2 \frac{\partial u_2}{\partial x}|_{x=0} + k_3^2 \frac{\partial u_3}{\partial x}|_{x=0} \,. \quad (3.2)$$



3-rasm: (3.1)-(3.2) tenglamalarda tasvirlangan yulduz grafigining har bir bog‘lamida hisoblangan cho‘qqidagi issiqlik oqimining vaqtga bog‘liqligi, berilgan qiymatlar uchun $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 3$, $k_1^2 = 9, k_2^2 = 1, k_3^2 = 4$ va $L_1 = L_2 = L_3 = 2$.

Birinchi chegaraviy shart eritma og‘irligining uzluksizligini ta‘minlaydi, ikkinchisi esa issiqlik oqimining grafik tepasida Kirxgof qoidasini bajarishi kerakligini bildiradi. (3.1) tenglamaning yechimini (chegaraviy shartlarsiz) quyidagicha yozish mumkin.

$$u_j(x,t) = \frac{x/k_j - x_0}{\beta_j} sd\left((x/k_j - x_0)^2 + 6t, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad (3.3)$$

Agar bj, kj, j = 1, 2, 3 koeffitsientlari quyidagi (cheklovlar) yig‘indisi qoidasiga bo‘ysinsa, chegara shartlarini (3.2) bu yechim bilan bajarish mumkin bo‘ladi:

$$\frac{k_1}{\beta_1} = \frac{k_2}{\beta_2} + \frac{k_3}{\beta_3} \quad (3.4)$$

(3.4) tenglamada metrik yulduz grafigida chiziqli bo‘lmagan issiqlik tenglamasining integrallanishi sharti keltirilgan. Harorat holati ham, oqim ham chiziqli holatdagidan butunlay farq qiladi. Nochiziqli rejimda cho‘qqi orqali oqim vaqt o‘tishi bilan juda zaif bo‘ladi, harorat holati butun birinchi bog‘lanishda deyarli bir xilda, ikkinchi va uchinchi bog‘lanishlarda esa u bog‘ning o‘rtasida joylashgan. Issiqlik oqimi bilan Kirxgof qoidasining bajarilishini 3-rasmdan ko‘rish mumkin, bu erda issiqlik oqimining cho‘qqidagi vaqtga bog‘liqligi Qj(0, t) chizilgan.

5. XULOSALAR. Tarmoq tipidagi tarmoqlangan tizimlarda issiqlik tarqalishini

chiziqli va nochiziqli bo'lmagan difüzyon rejimlarini hisobga olgan holda o'rgandik. Metrik grafiklardagi issiqlik tenglamasiga asoslangan model ikkala rejim uchun ham tarmoqlardagi issiqlik tarqalishini xarakterlash uchun ishlatiladi. Oddiy metrik grafiklarda chiziqli issiqlik(o'tkazuvchanlik) tenglamasining aniq analitik yechimlari olinadi. Bunday tizimlar uchun harorat holatlari va issiqlik oqimi hisoblab chiqiladi. Chegara shartlaridan kelib chiqib uchlarida Kirxhgof qoidalari bajarilishi ko'rsatilgan. Nochiziqli rejim metrik yulduz grafigida chiziqli bo'lmagan issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi asosida o'rganiladi. Nochiziqlilik koeffitsienti yig'indisi qoidasi ko'rinishida yozilishi mumkin bo'lgan ba'zi cheklovlarni bajargan holda aniq echimlar olinadi. Yuqoridagi modellarni polimerlar, uglerodli nanotrubka tarmoqlari, DNK va turli xil past o'lchamli tarmoqlar kabi turli tarmoqlangan materiallarda chiziqli va nochiziqli issiqlik tarqalishini o'rganish uchun qo'llanilishi mumkin.

ADABIYOTLAR

[1] T.Kottos va U.Smilanski, Ann. Phys., 1999.
[2] Oleg Xul va b., Phys. Red. E 69, 2004y.
[3]P.Kuchment, Волны в случайных средах, 14 с107 (2004).
[4] S.Gnutzmann и U.Smilansky, Adv.Phys. 55 527 (2006).
[5] N. Gol'dman va P. Gaspar, Phys. Red. V 77, 024302 (2008y.).
[6] P.Eksner va X.Kovarik, Квантовые волноводы. (Springer, 2015).
[7] L. Pauling, J. Chem. Phys. 4 673 (1936).
[8] K. Ruedenberg и C.W.Scherr, J. Chem. phys. 21 1565 (1953).
[9] С. Александер, Phys. Ред. B 27 1541 (1985).
[10] P.Exner, P.Seba, P.Stovicek, J. Phys. A: Matematika. Gen. 1988.
[11] V.Kostrikin va R.Shrader. J. Phys. A: Математика. Ген. 1999.
[12] J.Bolte и J.Harrison, J. Phys. A: Математика. Ген. 2003.
[13] S.Gnutzmann, J.P.Keating, F.Piotet, Ann.Phys., 2010.
[14] J.Harrison, T.Weyand и K.Kirsten, J. Math. физ. 2016.
[15] Z.Sobirov, D.Matrasulov, K.Sabirov, S.Savada, K.Nakamura, Phys. (2010).