ГЕОМЕТРИК ТЕНГСИЗЛИКЛАР ВА ЭКСТРЕМУМГА ОИД ГЕОМЕТРИК МАСАЛАЛАРНИ ЕЧИШ МЕТОДЛАРИ

Саипназаров Шайлавбек Актамович
ТДИУ, "Амалий математика" кафедраси доценти,
Педагогика фанлари номзоди

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Saipnazarov Shaylovbek Aktamovich
TSUE, "Applied Mathematics" department
Associate Professor, Candidate of Pedagogical Sciences,

GEOMETRIC INEQUALITIES AND METHODS FOR SOLVING EXTREMAL GEOMETRIC PROBLEMS

Саипназаров Шайлавбек Актамович
ТГЭУ, Доцент Кафедры "Прикладной математики"
Кандидат педогогических наук

Abstract. This article discusses methods for proving geometric inequalities and methods for solving extremal geometric problems. When solving extreme geometric problems and proving geometric problems by different methods: coordinate, vector, trigonometric, triangle inequality.

Аннотация. В этой статье рассмотрены методы доказательств геометрических неравенств и экстремальных геометрических задач. При решении экстремальных геометрических задач разными методами: координатным, векторным, тригонометрическим и неравенством треугольника.

Аннотация. Бу мақолада геометрик тенгсизликларни исботлаш ва эксремал геометрик масалаларни ечиш методлари кўрсатилган. Экстремал геометрик масалаларни ечишда ва геометрик тенгсизликларни исботлашда турли методлардан фойдаланилган. Координаталар, вектор, тригонометрик ва учбурчак тенгсизлиги.

Keywords. Inequality, triangle inequality, coordinate method, vector method, Cauchy method.

Ключевые слова. Нерванства, неравенство треугольника, метод координат, векторный метод, метод Коши.

Таянч сўзлар. Тенгсизликлар, учбурчак тенгсизлиги, координаталар методи, вектор методи, Коши методи.

Кириш. Қадимдаёқ геометрия аксиомалар системасига асосан тузилган қатъий мантиқий дедуктив фанга айланган. У узлуксиз ривожланган, янги теоремалар, ғоялар ва методлар билан бойиб борган. Геометрларнинг қизиқишлари ва илмий тадқиқотларнинг йўналишлари вақти – вақти билан ўзгариб турган. Шу сабабли ҳозирги геометриянинг предмети, мазмуни ва методларини қамраб олувчи аниқ таърифни бериш қийин.

Эрамиздан аввал III асрда қадимги юнон олими Евклид "Негизлар" номли асар ёзди. Евклид бу китобида шу давргача тўпланган геометрик билимларни жамлади ва бу фаннинг тугалланган аксиоматик баёнини беришга харакат қилди.

Евклид китобида пухта ўйланиб, чуқур мантиқийлик билан баён этилган геометрия математикларни, Евклид геометриясидан бошқача геометрия мавжуд бўлмайди, деган фикрга олиб келди.

XIX асрдагина, биринчи навбатда рус математига Н.И.Лобачевскийнинг ишлари туфайли, Евклид геометрияси мумкин бўлган ягона геометрия эмаслиги аниқланди. Ундан сўнг математикалар кўпгина турли "геометрия"лар яратдилар ва уларни ўргандилар. Бизнинг мумкин бўлган геометрик фазолар ҳақидаги тасаввурларимизнинг кенгайишига XIX асрда яшаган немис математиги Ф.Б.Риманнинг хизматлари айниқса катта. У чексиз кўп "геометрия"лар қуриш усулини кашф этди. Уларнинг "кичик" бўлаклари деярли Евклид геометрияси сингари тузилган, аммо бу геометрия фазосининг каттароқ қисмлари қаралганда "эгрилик"ка эга бўлиши юзага чиқади.

Илмий – техник жараёнларни тезлашуви, информацион технологияларнинг ўсиш жадаллиги ҳар бир соғлом фикрловчи инсон учун геометрик билимлар зарур.

Ўз вақтида академик А.Д.Александров шу ҳақда ёзган эди: барча техника геометрияга асосланган ва геометрия билан бошланади, ўлчов аниқлиги ва шакли, ҳар бир қисмни жойлашуви – геометрия кучига таянади. [1, 58 б.].

Бизнинг фикримизча, барча ўлчаш ишлари ва муаммоли математик масалалар геометрия ва унинг матодларига муҳтож.

Геометрик метод

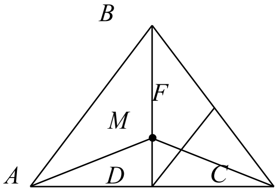
1

Геометрик метод

1. Учбурчак медианаларининг йиғиндиси S, унинг периметри $2p$ га тенг бўлса,

$$\frac{3}{2}p < S < 2p$$

қуйи тенгсизликни исботланг.



1-расм

Ечиш. Айтайлик, $BD = m_b - AC$ томонга тушурилган медиана учбурчакнинг томонлари $BC = a,\ CA = b,\ AB = c,\ F$ нуқта BC (1-расм) томоннинг ўртаси бўлсин. BFD учбурчак учун учбурчак тенгсизлигига кўра $m_b < BF + FD = \frac{1}{2}(a + c)$. Худди шунга ўхшаш тенгсизликларни m_a ва m_c медианалар учун ёзиб, уларни ҳадлаб қўшамиз, натижада

$$S < 2p$$

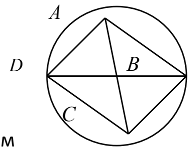
бажарилиши келиб чиқади.

Айтайлик, M -нуқта ABC учбурчакнинг медианаларининг кесишган нуқтаси бўлсин. $ABM,\ BCM,\ CAM$ учбурчакларга учбурчак тенгсизлигини қўллаб, ушбуларни ҳосил қиламиз:

$$\frac{3}{2}(m_a + m_b) > c,\ \frac{3}{2}(m_b + m_c) > a,\ \frac{3}{2}(m_c + m_a) > b$$

Уларни ҳадлаб қўшиб $S > \frac{3}{2}p$ ҳосил қиламиз.

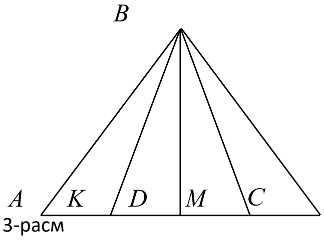
2. $ABCD$ тўртбурчакда A ва C бурчаклар ўтмас бўлса, $AC < BD$ ни исботланг.



2-расм

Ечиш. BD ни диаметр қилиб айлана чизамиз (2-расм). Масала шартига кўра A ва C лар ўтмас, у ҳолда A ва C нуқталар айлана ичида ётади, яъни $AC < BD$.

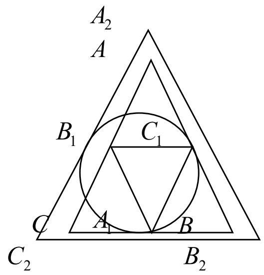
3. ABC учбурчакнинг AC томонида K ва M нуқталар шундай олинганки, $AK = MC$ (3-расм). Агар $AB < BC$ бўлса, у ҳолда $\angle ABK < \angle MBC$ бўлишини исботланг.



3-расм

Ечиш. $AK = MC \leq \frac{1}{2}AC$ деб ҳисоблаш мумкин. Акс ҳолда биз бурчаклар ичидан $\angle MBK$ нинг умумий қисмини ажратиб, K ва M нуқталар ролини алмаштиришимиз мумкин. BD медианани ўтказамиз. $AB\ >\ BC$ дан $\angle BDA$ ўтмас эканлиги келиб чиқади, B нуқтанинг AC га проекцияси DC нурда ётади. Демак, KB нинг проекцияси BM нинг проекциясидан катта ва $KB > BM$. Аммо ABK ва CBM учбурчаклар тенгдош, яъни $AB \cdot BK \sin\angle ABK = CB \cdot BM \sin\angle CBM$, бундан, $\sin\angle MBC > \sin\angle KBA$. Лекин $\angle ABK$ ўтмас бўлиши мумкин эмас. Шунинг учун $\angle MBC > \angle ABK$.

4. Агар ABC учбурчакка ташқи ва ички чизилган айланалар радиуслари мос равишда R ва r бўлса, $R \geq 2r$ эканлигини исботланг.



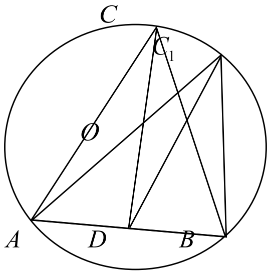
4-расм

Ечиш. Айтайлик, A_1, B_1, $C_1 - ABC$ учбурчак томонларининг ўрталари бўлсин (4-расм). $A_1B_1C_1$ учбурчакка ташқи чизилган айлана радиуси $\frac{R}{2}$ га тенг. Энди $\frac{R}{2} \geq r$ эканлиги равшан бўлиб қолади, чунки, $A_1B_1C_1$ учбурчакка ташқи чизилган айлана ABC учбурчак чегарасидан ташқарига чиқади. Қуйидагича иш тутиш мумкин: бу айланага ABC учбурчакнин томонларига параллел бўлган уринмалар ўтказамиз; натижада $A_2B_2C_2$ учбурчакни ҳосил қиламиз, бу учбурчак ясалишига кўра ABC га ўхшаш, бу учбурчак $\frac{R}{2}$ радиусли айланага ташқи чизилган бўлиб, у ABC учбурчакни ўз ичига олади. Демак, $\frac{R}{2} \geq r$ ёки $R \geq 2r$.

5. Ўткир бурчак учбурчакнинг томонлари a, b ва c га, унга ташқи чизилган айлана радиуси R га тенг бўлса, у ҳолда:

а) $a^2 + b^2 + c^2 > 8R^2$ б) $a + b + c > 4R$

тенгсизликларни исботланг.



5-расм

Ечиш. а) айтайлик, $m_c = CD - ABC$ учбурчакнинг медианаси бўлсин. Медиана узунлигини топиш формуласига кўра

$$m_c^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right),$$

бундан

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2m_c^2 + \frac{3}{2}c^2$$

ABC ўткир бурчакли бўлганлиги учун O нуқта учбурчак ичида бўлади. AC_1B $C_1D < CD$, чунки $\angle COD > C_1OD$. Бундан

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2m_c^2 + \frac{3}{2}c^2 > 2C_1D^2 + \frac{3}{2}c^2 = AC_1^2 + C_1B^2 + BA^2 = 8R^2$$

б) Дарҳақиқат, a, b ва c лар $2R$ дан кичик, у ҳолда

$$2R(a + b + c) > a^2 + b^2 + c^2 > 8R^2,$$

демак,

$$a + b + c > 4R.$$

6. ABC учбурчакнинг B ва C учларидан ўтказилган медианалар ўзаро перпендикуляр бўлса, у ҳолда

$$ctgB + ctgC \geq \frac{2}{3}$$

эканлигини исботланг.

Ечиш. Агар $AD -$ баландлик, $AN -$медиана, M нуқта эса медианаларнинг кесишган нуқтаси бўлса, у ҳолда

$$ctgB+ctgC=\frac{DB}{AD}+\frac{CD}{AD}=\frac{CB}{AD}\geq\frac{CB}{AN}=\frac{CB}{3MN}=\frac{2MN}{3MN}=\frac{2}{3}$$

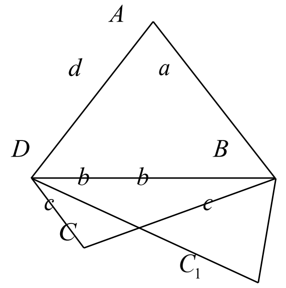
7. Агар учбурчак биссектрисаларининг узунликлари бирдан кичик бўлса, у ҳолда унинг юзи $\frac{\sqrt{3}}{3}$ дан кичик бўлишини исботланг.

Ечиш. Икки ҳолни қараймиз: 1) берилган учбурчак ўткир бурчакли. Айтайлик, $\angle B$ учбурчак бурчаклари ичида энг каттаси бўлсин: $60^\circ\leq B\angle 90^\circ$. Равшанки, A ва C бурчак биссектрисалари 1 дан кичик бўлганлиги учун учбурчакларнинг баландликлари h_A ва h_C лар ҳам 1 дан кичик бўлади.

$$S_{ABC}=\frac{h_A\cdot a}{2}=\frac{h_A\cdot\frac{h_C}{\sin B}}{2}=\frac{h_A\cdot h_C}{2\sin B}<\frac{\sqrt{3}}{3}$$

2) Агар учбурчак бурчакларидан бири ўткир бўлмаса, масалан, B бурчак ўткир эмас, у ҳолда унинг томонлари мос биссектрисалардан кичик, яъни 1 дан кичик, юзи эса $\frac{1}{2}$ дан ошмайди, яъни $S_{ABC}=\frac{1}{2}\leq\frac{\sqrt{3}}{3}$.

8. Қавариқ тўртбурчакнинг тартиб билан олинган томон узунликлари a,b,c,d, юзи эса S бўлса, у ҳолда $S\leq\frac{1}{2}(ac+bd)$ эканлигини исботланг.



6-расм

Ечиш. Агар a,c ва b,d томонлар қўшни томонлар бўлганда бизни тенгсизлигимиз осон исботлашар эди (учбурчакнинг юзи иккита томони кўпайтмасининг ярмидан катта бўлолмайди). Берилган $ABCD$ тшртбурчакни ABC_1D тшртбурчакка айлантирамиз (6-расм). Бунда BC_1D учбурчак BCD учбурчакка тенг.

ABC_1D тўртбурчак $ABCD$ тўртбурчакка тенгдош. Унда AC_1 диагоналли ўтказиб, иккита томонлари a,c ва b,d учбурчакларга ажратамиз.

Демак,

$$S_{ABC_1D}\leq\frac{1}{2}(ac+bd),\quad S_{ABC_1D}=S_{ABCD}$$

бўлганлигидан

$$S_{ABCD}\leq\frac{1}{2}(ac+bd)$$

Юзи юқорида ечган масалаларимизда геометрик усулларни қўлладик. Геометрик методни қўллаш ўқувчини (талабани) геометрик ясаш, геометрик алмаштиришлар, геометрик тасаввурини ва тафаккурини шакллантиради.

II. Аналитик метод. Кўплаб геометрик масалалар, жумладан геометрик тенгсизликларга оид масалалар геометрик алмаштиришлар, геометрик ясашлар, симметрия, буриш, параллел кўчириш, геометрия методлардан ташқари дифференциал ҳисоб, аналитик методлар ёрдамида ҳал қилиниши мумкин. Қуйидаги геометрик тенгсизликлар аналитик методга мансубдир.

1. Агар ABC учбурчакнинг томонлари a,b,c, унинг юзи S бўлса,

$$a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

тенгсизликни исботланг.

Ечиш. Исботлашимиз лозим бўлган тенгсизликнинг ўнг қисмидаги биринчи қўшилувчини қолдириб, a, b, c га боғлиқ бўлган ифодани қуйидагича гуруҳлаймиз:

$$\left(a^2-(b-c)^2\right)+\left(b^2-(c-a)^2\right)^2+\left(c^2-(a-b)^2\right)$$

бу ифодани ҳар бир қўшилувчисини кўпайтувчиларга ажратиб ва $x=a+b-c,\ \ y=a-b+c,\ \ z=-a+b+c$ алмаштиришни бажарамиз, у ҳолда

$$a^2-(b-c)^2+b^2-(c-a)^{2^2}+c^2-(a-b)^2=xy+xz+yz$$

$$P=\frac{a+b+c}{2}=\frac{1}{2}(x+y+z),\ \ p-a=\frac{1}{2}z,\ \ p-b=\frac{1}{2}y,\ \ p-c=\frac{1}{2}x$$

эга бўламиз. Герон формуласига кўра $S=\frac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)xyz}$. Бизнинг тенгсизлигимиз x, y, z бўйича қуйидаги кўринишга эга бўлади.

$$xy+yz+zx\geq\sqrt{3(x+y+z)xyz}$$

охирги тенгсизликни ҳар иккала қисмини xyz га бўламиз ва

$$u=\frac{1}{x},\ v=\frac{1}{y},\ \ w=\frac{1}{z}$$

алмаштиришларни бажариб ушбуга эга бўламиз.

$$u+v+w\geq\sqrt{3(uv+vw+wu)}$$

ҳосил бўлган тенгсизликни ҳар иккала қисмини квадрат кўтариб

$$u^2+v^2+w^2\geq uv+vw+wu$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бу тенгсизликни исботлашимиз қийин эмас. Юқоридаги тенгсизлик

$$(u+v)^2+(w-v)^2+(w-u)^2\geq 0$$

тенгсизликка тенг кучли. Тенгсизлик исбот бўлди. Тенглик шарти $u=v=w$, бунда $x=v=z\Rightarrow a=b=c$.

2. Учбурчакка ташқи чизилган айлана радиуси R, ички чизилган айлана радиуси r ва p -ярим периметр бўлса, $p\geq\frac{3}{2}\sqrt{6Rr}$ эканлигини исботланг.

Ечиш.

$$\frac{(a+b+c)r}{2}=\frac{abc}{4R}$$ дан $$Rr=\frac{abc}{4p}$$

$$2p=a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc},\qquad abc\leq\frac{8p^3}{27}$$

$$Rr=\frac{abc}{4p}\leq\frac{8p^3}{27\cdot 4p}=\frac{2p^2}{27}$$, бундан

$$p^2\geq\frac{27Rr}{2}\Leftrightarrow p\geq 3\sqrt{\frac{3Rr}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{6Rr}$$

3. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари a, b бўлса, у ҳолда унинг юзи S учун ушбу тенгсизлик ўринли эканлигини исботланг:

$$S<\frac{(a+b)^2}{4}.$$

Ечиш. $S=p\cdot(p-c)$ (бунда p -ярим периметр). Бу формуланинг исботи I бобда келтирилган.

$$\sqrt{S}=\sqrt{p(p-c)}<\frac{p+p-c}{2}=\frac{2p-c}{2}=\frac{a+b+c-c}{2}=\frac{a+b}{2}$$

$S < \frac{(a+b)^2}{4}$; тенглик қисми бажарилмайди, чунки $p - c \neq p$. Тенгсизлик исботланди.

4. Томонларининг узунликлари a, b ва c бўлган учбурчак учун ушбу тенгсизликни ўринли эканлигини исботланг:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Ечиш. Ушбу белгилашларни киритамиз:

$$b+c=x,\ a+c=y,\ a+b=z.$$

Бу тенгликларни қўшиб, қуйидагини ҳосил қиламиз.

$$z(a+b+c) = x+y+z,\ \ a+b+c = \frac{1}{2}(x+y+z)$$

$$a = \frac{y+z-x}{2},\ b = \frac{x+z-y}{2},\ \ c = \frac{x+y-z}{2}$$

Демак, берилган тенгсизликни чап қисми

$$\frac{y+z-x}{2x} + \frac{x+z-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x} - 1 + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} - 1 + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} - z\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{z} - 3\right) \geq \frac{1}{2}(2+2+2-3) = \frac{3}{2}$$

5. ABC учбурчакнинг томонлари a, b ва c , бу томонларга туширилган медианалар мос равишда m_a, m_b ва m_c бўлса,

$$\frac{m_a^2}{b^2+c^2} + \frac{m_b^2}{a^2+c^2} + \frac{m_c^2}{a^2+b^2} \leq \frac{9}{8}.$$

Ечиш. Медиана топиш формуласига кўра

$$m_a^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right),\quad m_b^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 + b^2\right) \text{ ва } m_c^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$$

$$\frac{m_a^2}{b^2+c^2} + \frac{m_b^2}{a^2+c^2} + \frac{m_c^2}{a^2+b^2} = \frac{1}{2} - \frac{a^2}{4\left(b^2+c^2\right)} + \frac{1}{2} - \frac{c^2}{4\left(a^2+b^2\right)} =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{a^2+c^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2}\right)$$

юқоридаги масалага кўра

$$\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{a^2+c^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \geq \frac{3}{2}$$

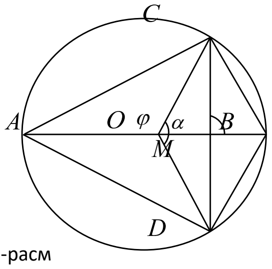
Демак,

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{a^2+c^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2}\right) \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$$

тенгсизлик исботланди.

Максимум ва минимумга оид геометрик масалалар

1. R радиусли айланада AB диаметр ўтказилган. Диаметр айлана марказида a масофада M нуқта берилган. M нуқтадан шундай CD ватар ўтказилганки, бунда ҳосил бўлган $ABCD$ тўртбурчак энг катта юзага эга бўлади. $ABCD$ нинг юзи нимага тенг?



1-расм

Ечиш. COD учбурчакни қараймиз (1-расм). Агар α AB ва CD орасидаги бурчак бўлса, у ҳолда $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AB\cdot CD\sin\alpha$, $S_{SOD}=\frac{1}{2}OM\cdot CD\sin\alpha$. Бундан

$$\frac{S_{SOD}}{S_{ABCD}}=\frac{OM}{AB}=\frac{a}{2R} \qquad (*)$$

Демак, $ABCD$ тўртбурчак юзи энг катта бўлиши учун COD учбурчакни юзи энг катта бўлиши лозим. Лекин, $S_{SOD}=\frac{1}{2}R^2\sin\varphi(\varphi=\angle COD)$. Демак, $\sin\varphi$ энг катта бўлиши керак. Аммо, $\varphi_0\le\varphi<180^\circ$, бунда $\varphi_0-\alpha=90^\circ$ га мос $\left(\cos\frac{\varphi_0}{2}=\frac{a}{R}\right)$ бурчак. Агар $\varphi_0\le 90^\circ$ бўлса, у ҳолда $\varphi_0=90^\circ$ да COD учбурчак юзи энг катта бўлади. Агар $\varphi_0>90^\circ$ бўлса, у ҳолда бу юза $\varphi=\varphi_0$ бўлганда энг катта бўлади.

$\varphi_0\le 90^\circ$ бўлганда, яъни $a>\frac{\sqrt{2}}{2}R$ бўлганда $S_{SOD}=\frac{1}{2}R^2$, (*) дан $S_{ABCD}=\frac{2R}{a}\cdot\frac{1}{2}R^2=\frac{R^3}{a}$. $\varphi_0>90^\circ$ бўлганда, яъни $a<\frac{R\sqrt{2}}{2}$ да $\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{a}{R}$, $\cos^2\frac{\varphi}{2}=\frac{a^2}{R^2}$ ёки $\frac{1-\cos\varphi}{2}=\frac{a^2}{R^2}$, $\cos\varphi=1-\frac{2a^2}{R^2}$

$$\sin\varphi=\sqrt{1-\left(1-\frac{2a^2}{R^2}\right)^2}=\sqrt{\frac{4a^2}{R^2}-\frac{4a^4}{R^4}}=\frac{2a}{R^2}\sqrt{R^2-a^2}$$

$$S_{COD}=\frac{1}{2}R^2\sin\varphi=\frac{1}{2}R^2\cdot\frac{2a}{R^2}\sqrt{R^2-a^2}=a\sqrt{R^2-a^2}$$

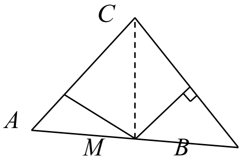
охирги тенглик ва (*) дан

$$S_{ABCD}=\frac{2R}{a}\cdot a\sqrt{R^2-a^2}=2R\sqrt{R^2-a^2}$$

2. ABC учбурчакнинг BC, AC, AB томонларига ўтказилган баландликлар мос равишда h_a, h_b, h_c бўлсин. Учбурчак ичидаги M нуқтадан шу томонларгача бўлган масофалар мос равишда u, v ва w бўлса, қуйидагиларни исботланг:

а) $\frac{h_a}{u}+\frac{h_b}{v}+\frac{h_c}{w}\to\min$ б) $\frac{h_ah_bh_c}{uvw}\to\min$

Ечиш. а) дастлаб қуйидаги масалани ечамиз. Айтайлик, M нуқта учбурчакнинг AB томонида бўлиб, M нуқтадан BC ва AC томонларигача бўлган масофалар мос равишда u ва v ва h_a, h_b баландликлар мос равишда BC ва AC томонларга туширилган баландликлар бўлсин. M нуқта AB томоннинг ўртаси бўлганда ифодани энг кичик қийматга эга бўлишини исботлаймиз. Бунинг учун ушбу белгилашларни киритамиз. $BC=a,\ AC=b,\ S-ABC$ учбурчакнинг юзи. Бундай ҳолда



$au+bv=2S$, бундан $v=\frac{2S-au}{b}$, буни $\frac{h_a}{u}+\frac{h_b}{v}=t$ ифодага қўйиб $atu^2-2Stu+2h_aS=0$ эга бўламиз. Бу тенгламанинг дискриминанти номанфий, яъни

2-расм

$$4S^2t^2 - 4ah_a \cdot 2St = 4S^2t^2 - 16S^2t \geq 0, \quad S^2t > 0$$

бўлгани учун $t \geq 4$ энг кичик қийматга $t = 4$ да эришади, яъни

$$\min\left(\frac{h_a}{u} + \frac{h_b}{v}\right) = 4$$

У ҳолда тенгламанинг илдизи

$$u = \frac{S}{a} = \frac{h_a}{2}, \quad v = \frac{h_b}{2}$$

Бундан келиб чиқадики, берилган а) масала энг кичик қийматга M нуқта медианаларнинг кесишган нуқтасида эканлиги келиб чиқади. Бундан

$$\frac{h_a}{u} \geq 3, \quad \frac{h_b}{v} \geq 3, \quad \frac{h_c}{w} \geq 3$$, яъни

$$\frac{h_a}{u} + \frac{h_b}{v} + \frac{h_c}{w} \geq 9$$

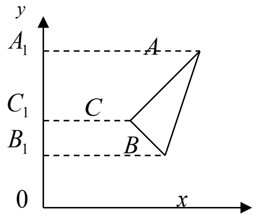
б) юқоридаги тенгсизликларни қадлаб кўпайтирсак,

$$\frac{h_a h_b h_c}{uvw} \geq 27$$

Демак, а) $\min\left(\frac{h_a}{u} + \frac{h_b}{v} + \frac{h_c}{w}\right) = 9$, б) $\min\frac{h_a h_b h_c}{uvw} = 27$.

3. a, b, c томонларга эга бўлган учбурчакнинг учлари бутун координаталарга эга. Учбурчакка ташқи чизилган айлана радиуси R га тенг бўлса,

$$\frac{abc}{R} \to \min$$



3-расм

Ечиш. Учбурчакнинг юзи $S = \frac{abc}{4R}$, бунда a, b, c учбурчак томонлари, R -ташқи чизилган айлана радиуси. Шунинг учун $S \geq \frac{1}{2}$ тенгсизликни исботлаш етарли. Айтайлик, учбурчакнинг A, B, C учлари $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ координаталарга эга бўлсин. Уларнинг Oy ўқдаги проекциялари A_1, B_1, C_1 (3-расм). У ҳолда

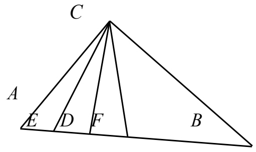
$$S = S_{ABB_1A_1} - S_{ACC_1A_1} - S_{BCC_1B_1} = AB_1 \cdot \frac{AA_1 + BB_1}{2} - A_1C \cdot \frac{AA_1 + CC_1}{2} - B_1C_1 \cdot \frac{BB_1 + CC_1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(y_1 - y_2)(x_1 + x_2) - (y_1 - y_3)(x_1 + x_3) - (y_3 - y_2)(x_2 + x_3)\right]$$

Квадрат қавс ичидаги сонлар бутун (масала шартига кўра). Демак, $2S$ ҳам бутун сон. $S \neq 0$, у ҳолда $2S \neq 0$.

Шундай қилиб, $2S \geq 1$, бундан $\min\frac{abc}{R} = 2$ эканлиги келиб чиқади.

4. ABC тўғри бурчакли учбурчакда $\left(C = 90^\circ\right)$ $CD \perp AB$, ACD бурчак биссектрисаси CE, BCD бурчак биссектрисаси эса CF (4-расм) бўлса, S_{ABC} / S_{CEF} нисбатнинг энг кичик қийматини топинг.



4-расм

Ечиш. Айтайлик, $BC=a,\ AC=b,\ AB=c$ бўлсак, у ҳолда

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}=\frac{C}{EF}.$$

EF ни C орқали ифодалаймиз.

$\angle BEK=90^{\circ}-\angle DCE=90^{\circ}-\angle ACE=\angle ECB$ бўлганлигидан, $BC=BE=a$. Шунга ўхшаш $AF=AC=b$. $EF=BE+AF-AB$, у ҳолда $EF=a+b-c$ $\quad a^2+b^2=c^2$ эканлигини ва $2ab=\leq$ ҳисобга олиб,

$$a+b=\sqrt{c^2+2ab}\leq\sqrt{2}c$$

ҳосил қиламиз. Бундан

$$EF\leq\left(\sqrt{2}-1\right)c$$

Демак,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}\geq\frac{C}{\left(\sqrt{2}-1\right)c}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$$

$$\min\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}}=\sqrt{2}+1.$$

5. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари a, b, гипотенузаси эса c га тенг. Унга ташқи чизилган айлана радиусининг ички чизилган айлана радиусига нисбатининг энг кичик қийматини топинг.

Ечиш.

$$S=r^2+2Rr=\frac{(a+b+c)\cdot r}{2}=\frac{(c\sin\alpha+c\cos\alpha+c)\cdot r}{2}=$$

$$=\frac{c(\sin\alpha+\cos\alpha+1)\cdot r}{2}=\frac{2R(\sin\alpha+\cos\alpha+1)\cdot r}{2}=$$

$$=R(\sin\alpha+\cos\alpha+1)\cdot r$$

Охирги тенгликни ҳар иккала қисмини r^2 га бўламиз ва $\frac{R}{2}=x$ деб белгилаб

$$1+2x=x(\sin\alpha+\cos\alpha+1)$$

ҳосил қиламиз. Бундан

$$x=\frac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha-1}\geq\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$$

шундай қилиб,

$$\min\frac{R}{2}=\sqrt{2}+1.$$

Хулоса

Ҳозирги кунда геометрия билим ва талабанинг техника маъносидаги тафаккурининг маҳсули ҳисобланади.

Геометрия тили на фақат илмда балки, техникада, кундалик ҳаётда тадбиқ этилади. Амалиётда геометрик моделлар кенг кўламда мураккаб жараёнларни лойиҳалаш ишларини амалга оширишда ёрдам беради. Бу моделлар, геометрик ўхшашликлар асосида қурилган, объектларни оптимал жойлаштиришлар билан боғлиқ бўлган масалаларни ҳал қилишга имкон яратади. Геометрия ва унинг методларини ўрганиш талабаларнинг касбий маҳоратларини такомиллаштириш имконини беради.

Талабанинг фазовий ва мантиқий тафаккурини шакллантиради. Унинг методлари математика ва техникага оид масалаларни ечишда қўлланилади.

Фойдаланилган адабиётлар

Александров А.Д. "О геометрии" // Математика в школе. – 1980. -№3, -с. 56-62.

Абдуллаев Рустамжон "Интеллектуальный мир, модель экономического пространства и законы идеальной экономики". М.: 1995.

Саипназаров Ш.А., Салимов Д.Т., Азимов Д.М., Алиев И.М. "Математика для экономистов". Учебное пособие. Ташкент. 2022.

Saipnazarov Sh.A. Ortiqova M.T., Usarov J.A. "Moliyaviy matematika". T.: 2022.

Новиков А.И. Экономико-математические методы и модели: Учебник для бакалавров. М.: 2020.

G.Jay Kerns. Introduction to Probability and statistics Using R. – G.Jay Kerns, 2010.