GEOMETRIYA O‘QITISHDA AMALIYOTGA YO‘NALTIRISH

Saipnazarov Shaylovbek Aktamovich
Amaliy matematika kafedrasi dotsenti, p.f.n
https://doi.org/10.53885/edinres.2024.04.1.050

ПРАКТИЧЕСКОЕ НАПРАВЛЕНИЕ ПРИ ОБУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ

Саипназаров Шайловбек Актамович
к.п.н., доцент кафедры Прикладная математика

PRACTICAL DIRECTION IN TEACHING GEOMETRY

Saipnazarov Shailovbek Aktamovich
Ph.D. Associate Professor,
Department of Applied Mathematics

Annotatsiya. Bu maqolada geometriya o‘qitishda amaliyotga yo‘naltirish masalasi sifatida iqtisod masalasi qaralgan.

Matematik fanlarning kelib chiqishi, shubhasiz, iqtisod ehtiyojlari bilan bog’liq bo‘lgan. Ishlab chiqarishning taraqqiyoti va mirakkablashishi bilan iqtisodning matematik hisoblarga, uni optimal yechish metodlariga bo‘lgan ehtiyoji ortib borganligini hisobga olib amaliyotga yo‘naltiruvchi masalalarni yechish namunalari qaralgan.

Tayanch so‘zlar. Matematik iqtisod, iqtisodiy omillar, geometric interpretatsiya, optimal yechim, iqtisodiy ko‘rsatkichlar.

Abstract. In this article, the issue of economy is considered as an issue of practical guidance in teaching geometry.

The origin of mathematical sciences was undoubtedly related to the needs of the economy. Taking into account the fact that the economy’s need for mathematical calculations and methods of its optimal solution has increased with the development and complication of production, examples of solving problems that lead to practice have been considered.

Key words. Mathematical economics, economic factors, geometric interpretation, optimal solution, economic indicators.

Аннотация. В данной статье рассматривается экономическая задача в качестве задачи практического направления при обучении геометрии.

Зарождение математических наук, несомненно, было связано с потребностями экономики. С учетом того, что потребность экономики в математических расчетах и методах ее оптимального решения возросла с развитием и усложнением производства, рассмотрены примеры решения практических задач.

Ключевые слова. Математическая экономика, экономические факторы, геометрическая интерпретация, оптимальное решение, экономические показатели.

Kirish. Pedagogik tadqiqotlarda amaliyotga yo‘naltirish deganda matematika kursini mazmun jihatdan amaliyot bilan bog‘lanishi tushuniladi. Pedagogik adabiyotlarda amaliy masalalar haqidagi tushuncha turlicha talqin qiladi. Ba’zi tadqiqotchilar (G.G.Maslova, N.L.Tixonov, S.S.Vardaiyan, G.M.Voznyak, Nguen Van Chang va b.q.) amaliy masalalarni tabiiy tildan matematika tiliga o‘tish deb hisoblaydilar. Boshqa tadqiqotchilar (N.Gaybullaev, Ya.A.Korol, G.M.Morozov va b.q.) amaliy masala deganda qo‘yilgan masalani yechish metodi amaliyotda kelib chiqadigan masalaga yaqin bo‘lishini tushunadilar.

Bizning fikrimizga amaliyot masalasi – bu matematika tashqarisida qo‘yilgan masala va matematik metodlar yordamida yechiladigan masaladir.

Amaliyotga yo‘naltirish masalalaridan biri bu iqtisod masalasidir. Matematik fanlarning kelib chiqishi, shubhasiz, iqtisod ehtiyojlari bilan bog‘liq bo‘lgan. Masalan, qancha maydonga don sepish, oilani to‘q tutish uchun zarur ekin maydonini qanday qilib o‘lchash va olinajak hosilni chamalab baholash zarur bo‘lgan.

Ishlab chiqarishning taraqqiyoti va murakkablashishi bilan iqtisodning matematik hisoblashlarga bo‘lgan ehtiyoji ortib bordi. Hozirgi ishlab chiqarish – ko‘plab korxonalarning qat’iy muvozanatga solingan faoliyatidan iboratki, u behisob matematik masalalarni yechish bilan ta’minlanadi. Bu ish bilan iqtisodchilar, reja tuzuvchilar va buxgalterlarning bir butun armiyasi mashg‘ul, minglab elektron hisoblash mashinalari esa hisob – kitoblar bilan band. Bunday masalalar qatoriga ishlab chiqarish rejasini tuzish ham, qurilish ob’ektlarining eng afzal joylashuvini aniqlash ham, yuk tashishning eng tejamli marshrutlarini tanlash ham kiradi.

Bunday turdagi masalalarni yechish bilan matematik iqtisod fani shug'ullanadi. Matematik iqtisod, shuningdek, avvaldan ma'lum iqtisodiy hodisalarning modellashtirilgan matematik tavsifi, iqtisodiy hisob – kitoblardagi turli gipotezalarning tahlili, ularni ifodalovchi matematik munosabatlar bilan ham shug'ullanadi.

Matematik iqtisodning murakkab muammosi – nazariyani amaliyot bilan taqqoslash: iqtisodiy ko'rsatkichlarni o'lchash anchayin qiyin, axir ular laboratoriya sharoitida o'lchamaydi, kuzatuvlarni olib borish uchun esa kamdan – kam holda imkon bor (aholi ro'yxati), qolaversa, ular har xil sharoitlarda o'tkaziladi va qator noaniqliklarga ega bo'ladi. Shu boisdan bu sohada boshqa fanlarda to'plangan o'lchamlar tajribasidan foydalanish dargumon bo'lib, maxsus metodlar ishlab chiqish taqozo etiladi.

Matematik iqtisodning taraqqiyoti "Matematik programmalashtirish" degan umumiy nom bilan birlashtiriluvchi bir necha matematika sohalari paydo bo'lishiga turtki bo'ldi.

Geometriya o'qitishda talabalarning iqtisodiy tarbiyasi

Talabalarning iqtisodiy tarbiya deganda biz iqtisod mazmunidagi masalalarni yechish jarayonida iqtisodiy omillar va ularning geometrik interpretatsiyasini ko'rsatishdan iboratdir.

Bizning fikrimizcha, akademik litsey va kasb – hunar kollejlarini talabalariga matematik programmalashtirishning ayrim metodlari bilan tanishtirish lozim. Matematik programmalashtirish metodlari chegaralangan resurslardan oqilona foydalanishni talab etadi.

Ushbu misolni qaraymiz.

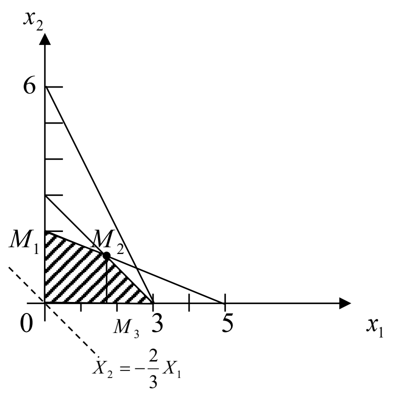
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x^2 \le 10 \\ 2x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Shartlarni qanoatlantiruvchi shunday x_1 va x_2 larni topish kerakki, bunda $F(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$ funksiya maksimal qiymatga ega bo'lsin.

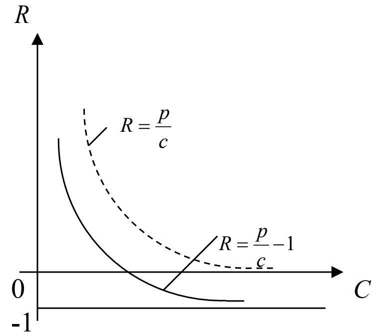
Keltirilgan masalaning joiz yechimi deb, shunday juftlik sonlarga aytiladiki, bunda bu ikki o'zgaruvchi masalaning barcha cheklovlarini qanoatlantiradi.

Optimal yechim deb F funksiya eng katta qiymat qabul qiladigan yechimga aytiladi.

Masalaning joiz yechimlar to'plamini topamiz (1 – rasm).



1 – rasm



2 – rasm

Bu soha $OM_1\ M_2\ M_3$ to'rtburchakdan iborat. Biz $OM_1\ M_2\ M_3$ sohadan shunday x_1 va x_2 larni topishimiz kerakki, bunda $F(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$ funksiya maksimal qiymat qabul qilsin. Aytaylik, $2x_1 + 3x_2 = 0$, bundan $x_2 = -\frac{2}{3}x_1$. Bu funksiya grafigini chizamiz. Buni OX_2 yo'nalishi bo'yicha parallel ko'chirishimiz (bu $2x_1 + 3x_2$ v ifodaning qiymatini oshishiga olib keladi). Uning eng chetki nuqtasi M_2 bo'ladi. U $2x_1 + 5x_2 = 10$ va $x_1 + x_2 = 3$ to'g'ri chiziqlarni kesishish nuqtasidir.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 10 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

Sistemaning yechib, $x_2 = \frac{4}{3},\ x_1 = \frac{5}{3}$ hosil qilamiz.

$$F(x_1, x_2) = F\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right) = 2 \cdot \frac{5}{3} + 3 \cdot \frac{4}{3} = \frac{22}{3}$$

Amaliy masalalarda F funksiya maqsad funksiya $OM_1\ M_2\ M_3$ ko‘rinishdagi ko‘pburchak esa cheklovlar ko‘pburchagi (yechimlar ko‘pburchagi) deb yuritiladi.

Ba’zi iqtisodiy ko‘rsatkichlar va ular orasidagi bog‘lanishlarni kiritamiz. Agar foyda π, $R-$rentabellik, X–xarajat, n–mahsulot miqdori, P–mahsulotning borlik narxi, $C-$ tannarx bo‘lsa, u holda

$$\pi = p \cdot n - X;$$

$$R = \frac{\pi}{X} = \frac{p \cdot n - X}{X} = \frac{p \cdot n}{X} - 1 \qquad (1)$$

$$C = \frac{X}{n} \qquad (2)$$

bo‘lganligidan

$$R = \frac{p}{C} - 1 \qquad (3)$$

hosil qilamiz.

(3) formula ko‘rgazmali geometrik interpretatsiyaga (talqin) ega (2-rasm).

(3) formuladan tannarxni minimallashtirish rentabellikni maksimallashtirishga ekvivalent bo‘ladi. Agar,

1) $C < p$ bo‘lsa, u holda (korxona rentabel),

2) $C = p$ bo‘lsa, u holda $R = 0$,

3) $C > p$ bo‘lsa, u holda $R < 0$ (korxona norentabel).

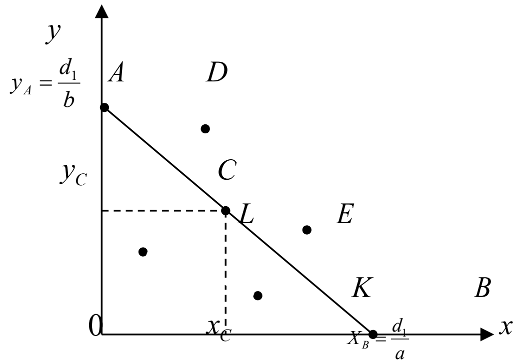
Demak, foydani maksimallashtirish uchun yuqoridagi masalani yechish kabi amalga oshiriladi, ya’ni chiziqli programmalashtirish masalasi yechiladi. Rentabullikni yoki gektariga olinadigan foydani maksimallashtirish uchun esa kasr chiziqli funksiyani maksimallashtirish qoidasidan foydalaniladi.

Geometriya va uning metodlari abstrakt bo‘lishiga qaramay uning ko‘pgina tarmoqlari amaliy tadbiq qilinadi va insonga tabiatning murakkab qonunlarini egallashda yordam beradi. Tadqiqotchi ilmiy abstraksiyadan foydalanib, tabiat va borliq hodisalarni chuqur hamda har tomonlama o‘rganish imkoniyatiga ega bo‘ladi. Matematika bilan odam masalasining, agar bu masala murakkab, shu bilan birga, qiziq yechimi standart bo‘lmasa yechimni topishda erishgan muvaffaqiyatidan olgan zavqi bundan keyingi ishi uchun va olg‘a qilib harakat qilishi yaxshi omil bo‘lib xizmat qilishi mumkin. Ijobiy emotsiyaning tug‘ilishi miyaning ishida samarali natija berar ekan va matematik faoliyatining yanada kuchliroq rivojlanishiga imkon yaratar ekan, o‘qituvchining vazifasi bu ichkoniyatlarni oldindan ko‘rish, ulardan bilimlarni tushunish va berish maqsadlarida foydalanishdan iboratdir. Biz talabalarga ularning go‘zallikni his etishni, iqtisodga qiziqish va zavqlanish tuyg‘ularini his etishni o‘rganishlariga, go‘zal narsalarni payqashlariga, qadrlashlariga va uni yaratishlariga yordam berishimiz kerak. Geometriya darsida talabalarning iqtisodiy bilimlarini shakllantirishda masalani shunday tanlashimiz kerakki, bu masala iloji boricha hayotdan olingan bo‘lishi lozim. Gap natijasining ahamiyatini uni hosil qilishning sodda va original uslublari bilan birgalikda ifodalovchi yechim haqida borganda, biz ko‘pincha “go‘zal yechim” yoki “ajoyib isbot” degan so‘zlarni aytamiz va eshitamiz. Bunday uslublar kishida zavq uyg‘otadi, aqlning kuchini va fikrning go‘zalligini his etishga yordam beradi.

Akademik litseylar geometriya kursida, maktab va oliy o‘quv yurtlarida nuqtalarning geometrik o‘rinlarini topishga doir masalalar qaraladi va ular tekshiriladi. Quyidagi sodda masalani qaraylik. Faraz qilaylik, xaridor 2 xil molni sotib olishni afzal ko‘rsin. Xaridorning berilgan vaqt ichidagi, daromadi d bo‘lsin. Xaridor berilgan vaqt ichida d pul birligidan yuqori pul sarflashi mumkin emas. U holda $ax+by=d$ (1) $(d_1 \le d)$ shartni qanoatlantiruvchi $(x;\, y)$ mollar to'plamidan xarid qilish mumkin. Mollar to'plamini to'g'ri burchakli koordinata (mollar tekisligida) grafik ravishda tasvirlash uchun (1) tenglikdan foydalanish qulay (bunda $x-$molning narxi $a-$molning narxi b). (1) tenglama bilan aniqlanadigan chiziq iqtisod kursida budjet (narz) chizig'i deb yuritiladi.

$$y=\frac{d_1}{b}-\frac{a}{b}x \qquad (2)$$

Ko'rinishda yozish mumkin. d_1, a, b o'zgarmas kattaliklar bo'lgani uchun (2) tenglama to'g'ri chiziqni ifodalaydi, bunda $\frac{d_1}{b}$ ozod had, $\frac{a}{b}$ esa x o'zgaruvchi oldidagi koeffitsient. Budjet chizig'i grafikda AB to'g'ri chiziqdan iborat. A va B nuqtalarning koordinatalari budjet chizig'i bilan koordinata o'qlarining kesishgan nuqtalari.



3 – rasm

A nuqta ordinatasi $y_A=\frac{d_1}{b}$ xaridorning faqat x molni xarid qilishini, B nuqta abssissasi $X_b=\frac{d_1}{a}$ esa xaridor faqat y mol uchun o'z daromadini sarflaganligini bildiradi. $C(X_C,\, Y_C)$ nuqta esa xaridor o'z daromadining X va Y mollar uchun sarflanganligini bildiradi. OAB uchburchak xaridorning molni sotib olish imkoniyatlar to'plami.

Uchburchak ichiga tegishli bo'lgan K va L nuqtalar xaridorning x va y mollarni sotib olishga imkoni borligini bildirsa, D va E nuqtalarda x va y mollarni sotib olishga imkoni bo'lmasligini bildiradi. Agar xaridorning daromadi d_1 dan d_2 gacha ortsa va narxlar o'zgarmay qolsa, u holda yangi budjet chizig'ining tenglamasi

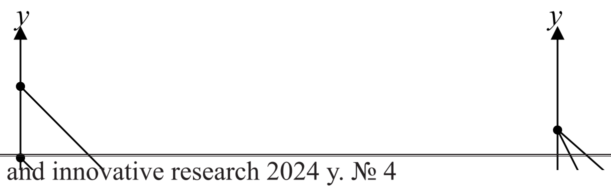
$$y=\frac{d_2}{b}-\frac{d_1}{b}x \qquad (3)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Haqiqatan, $d_2=d_1+\alpha(\alpha>0,\, \alpha \in R)$ bo'lganligi uchun

$$y=\frac{d_2+\alpha}{b}-\frac{d_1}{b}x=\frac{d_1}{b}-\frac{d_1}{b}x+\frac{\alpha}{b}$$

$$x=\frac{d_1+\alpha}{a}-\frac{b}{a}y=\frac{d_1}{a}-\frac{b}{a}y+\frac{\alpha}{a}$$

formulalar hosil bo'ladi. Bu formulalar parallel ko'chirish formulalari bo'lganligi uchun budjet chizig'i daromad o'sganda budjet chizig'ining yuqoriga, daromad kamayganda esa pastga parallel ko'chishini ko'rsatadi.



A_2

A

A_1

0 B_1 B B_2 x

4-rasm.

A $y=\frac{\alpha}{b}$

0 B K x

5-rasm.

Endi faqat bitta mol narxini o‘zgartirishni α gacha tekshiraylik. Aniqlik uchun x molning narxi a kamaygan bo‘lib, y molning narxi va xaridorni daromadi o‘zgarmay qolsin. Bunday holda budjet chizig‘i

$$y=\frac{\alpha}{b}-\frac{a}{b}x$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Shunday qilib, x mol narxining kamayishi budjet chizig‘ini soat strelkasi yo‘nalishiga teskari yo‘nalishda budjet chizig‘ining Oy o‘qi bilan kesishgan nuqtasi atrofida burishga olib kelar ekan, x mol narxining o‘sishi yuqoridagiga o‘xshash soat strelkasi yo‘nalishi bo‘yicha buriladi.

Masala: Xaridor 2 xil (2; 5) yoki (4; 3) juftliklardagi mollar to‘plamini sotib olish ma’lum bo‘lsa, budjet chizig‘i qanday ko‘rinishga ega bo‘ladi? Agar birlik narx 100 000 so‘m bo‘lsa, xaridorning daromadi necha so‘mni tashkil etadi?

Yechish. Bu iqtisodiy masalani matematika tilida quyidagicha bayon qilamiz. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi tuzilsin. To‘g‘ri chiziq tenglamasini $ax+by=c$ ko‘rinishda izlaymiz. To‘g‘ri chiziq (2; 5) va (4; 3) nuqtalardan o‘tganligi uchun ushbu sistemani yechamiz:

$$\begin{cases} 2a+5b=c \\ 4a+3b=c \end{cases}$$

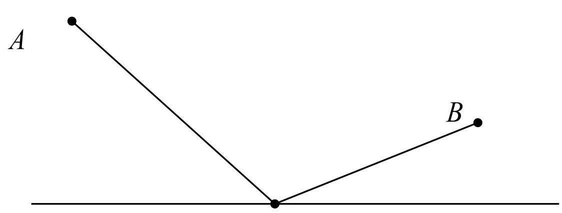
Sistemani yechib, $a=b, c=7b$ ekanligini topamiz. Demak, budjet chizig‘i $x+y=7$ ko‘rinishda bo‘ladi.

Endi iqtisodiy masalaga qaytamiz. Mollarning narxlari teng birinchi, ikkinchi mol narxlarining qiymati 100 000 so‘m tashkil etadi. Xaridorning daromadi esa 700 000 so‘mdan iborat. Bunday turdagi masala talabaning faqat iqtisodiy tafakkurinigina emas, balki geometrik fikrlashni ham o‘stiradi.

Matematik fanini o‘qitishda asosiy e’tirof uni amaliyot bilan uzviy bog‘langan holda olib borishga qaratilishi zarur. Ayniqsa, iqtisodiyot, qurilish, arxitektura va boshqa yo‘nalishlar negizida matematika yotganligini har bir tinglovchi o‘quv jarayonida tadbiq etishi kerak. Shu o‘rinda, bir amaliy masala keltirib, uni yechishni tavsiya qilaylik.

Qirg‘og‘i to‘g‘ri chiziq shaklidagi kanalning bir tomonida ikkita yashash punkti bo‘lib, ularni toza ichimlik suvi bilan ta’minlaydigan havza qurish talab etilsin.

Havza kanalning qaysi joyiga qurilsa, yashash punktlariga o‘tkaziladigan quvurlarga sarflanadigan xarajat eng kam bo‘ladi.



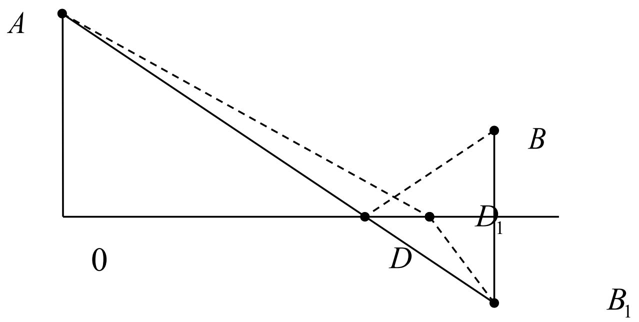
D K

6-rasm.

Masalani matematik modelini tuzaylik. Kanalni K to‘g‘ri chiziq, aholi punktlarini A va B, havza qurilish lozim bo‘lgan nuqtani D bilan belgilasak, masala quyidagi ko‘rinishni oladi:

K to‘g‘ri chiziqqa yotuvchi shunday D nuqta topingki, bu nuqtadan A va B nuqtalargacha bo‘lgan masofalar yig‘indisi eng kichik bo‘lsin (6-rasm).

Bu masalani yechish uchun B nuqtaga K to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo‘lgan B_1 nuqta olib, AB_1 kesmani hosil qilamiz. Shu kesmani K to‘g‘ri chiziq bilan kesishgan D nuqtasi izlanayotgan nuqta bo‘ladi (7-rasm).



7-rasm.

Haqiqatan, K to‘g‘ri chiziqda yotuvchi, D dan farqli ixtiyoriy D_1 nuqta uchun

$$AD_1 + D_1B_1 = AD_1 + D_1B > AB_1 = AD + DB$$

eng kichik qiymat AB_1 kesmaning uzunligi ekanligi ravshan. Bu qiymatni va D nuqtani aniq topish uchun koordinatalar metodidan foydalanamiz. Agar K ni Ox o‘qi sifatida OA kesmani o‘z ichiga oluvchi o‘qni Oy sifatida olsak, A, B va D nuqtaning koordinatalari:

$$A(o,\, a),\ B(d,\, b),\ D(x,\, o)$$

kabi aniqlanadi. Bu yerda a, b, d ma’lum. D nuqtaning abssissasi noma’lum. Shuningdek, B_1 nuqta koordinatalari $B_1(d;\ -b)$, izlanayotgan AB_1 kesma $AB_1 = \sqrt{d^2 + (a+b)^2}$ bo‘ladi. Endi, bu qiymatga x ning qaysi qiymatida erishishini topamiz.

$\overline{AD} = (x;\ -a)$, $\overline{DB_1} = (d - x;\ -b)$, hamda $\overline{AD}$ va $\overline{DB_1}$ bir xil yo‘nalishda bo‘lgani uchun

$$\frac{x}{d-x} = \frac{a}{b}, \quad x = \frac{db}{a+b}$$

topish qiyin emas.

Shunday qilib, havzani qaysi joyga oʻrnatish aniqlandi. Bu bir tomondan tatbiqiylikni namoyish etsa, ikkinchi tomondan baʼzi ekstremal masalalarni shu usul bilan imkonini beradi. Haqiqatan, deylik

$$\sqrt{x^2-6x+13}+\sqrt{x^2-14x+58}$$

Ifodaning eng kichik qiymatini topish talab etilayotgan boʻlsin, masalaning yechish uchun berilgan ifodani

$$\sqrt{(x-3)^2+4}+\sqrt{(x-7)^2+9}$$

Koʻrinishda ifodalasak, uni yuqorida koʻrilgan masala modeliga oʻxshash ekanligini koʻramiz.

$$A(x;\ o),\ \ B(3;-2),\ \ C(7;\ 3)\ \text{deb}$$

$$AB=\sqrt{(x-3)^2+4},\quad AC=\sqrt{(x-7)^2+9}$$

boʻlib, izlanayotgan qiymat $BC=\sqrt{41}$ boʻladi, bu qiymatga u $\overline{AB}$ va $\overline{AC}$ bir xil yoʻnalishga ega boʻlganda erishadi.

$$\overline{AB}=(3-x;\ -2),\quad \overline{AC}=(7-x;\ 3)\ \text{ekanligidan,}$$

$$\frac{3-x}{7-x}=-\frac{2}{3}\qquad \text{bundan,}\qquad x=4{,}6\,.$$

Demak, analiz masalasining yechishda geometrik metod yordam berdi, baʼzi hollarda geometrik masalani yechishda algebra yoki analiz formulalari, qoidalari yordam beradi.

Geometrik talqin yordamida yechish mumkin boʻlgan ekstremal masalalarga misollar keltiramiz.

Ushbu

$$f(x,\ y)=ax+by \tag{1}$$

chiziqli funksiyani markazi koordinata boshida boʻlgan birlik aylanada qaraylik. Umuman olganda (1) ni $\overline{m}(a;\ b)$ va $\overline{\lambda}(x,\ y)$ vektorlarning skalyar koʻpaytmasi sifatida qarash mumkin. Agar $\overline{\lambda}(x,\ y)$ vektorning oxiri aylanaga tegishli boʻlsa, uning uzunligi oʻzgarmaydi hamda uning $\overline{m}(a;\ b)$ vektor bilan skalyar koʻpaytmasi oʻzining maksimal qiymatiga oʻzaro kollenear boʻlganda biror $(x_0,\ y_0)$ nuqtada erishadi va

$$(x_0,\ y_0)=\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

boʻladi. Mos skalyar koʻpaytma esa $(x_0,\ y_0)\cdot(a,\ b)=\sqrt{a^2+b^2}$ boʻladi. Demak, chiziqli funksiyaning aylanadagi minimal qiymati

$$\min(ax+by)=\sqrt{a^2+b^2} \tag{2}$$

boʻlar ekan. Endi shu xossaning bir tatbiqi xususida toʻxtalamiz. Deylik,

$$f_1(x,\ y)=a_1x+b_1y$$

$$f_2(x,\ y)=a_2x+b_2y$$

$$f_n(x,\ y)=a_nx+b_ny$$

boʻlsin. U holda (2) natijaga koʻra

$$\begin{aligned}&\min f_1(x,\ y)+\min f_2(x,\ y)+\ldots+\min f_n(x,\ y)\le\\ &\le\min\big(f_1(x,\ y)+f_2(x,\ y)+\ldots+f_n(x,\ y)\big)=\\ &=\sqrt{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2+(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2}\end{aligned} \tag{3}$$

yoki

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\ldots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}\le\sqrt{(a_1+a_2+..+a_n)^2+(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2}$$

tengsizlikka kelamiz. Bu tengsizlik yordamida shartli ekstremum masalalariga oid bo'lgan biroq klassik usullar bilan yechib bo'lmaydigan ayrim masalalarni yechish mumkin.

Masalan ushbu

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}+\ldots+\sqrt{x_n^2+y_n^2}\to\max$$

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=1$$

$$y_1+y_2+\ldots+y_n=2\sqrt{2}$$

shartli ekstremum masalasini qaraylik. Bu masalaning yechimi yuqoridagi (3) tengsizlikdan bevosita kelib chiqishini ko'rish qiyin emas

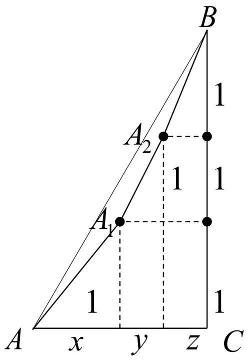
$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}+\ldots+\sqrt{x_n^2+y_n^2}\le\sqrt{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2+(y_1+y_2+\ldots+y_n)^2}=\sqrt{1+8}=3$$

ya'ni irratsional ifodaning joiz maksimal qiymati 3 ga teng. Bunday misol va masalalarni qo'plab keltirish mumkin.

Yana masalaga murojaat qilamiz. x, y, z musbat sonlar uchun $x+y+z=1$ shart bajarilganda

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+z^2}\to\min$$

ekanligini geometrik metod yordamida yechamiz. Bu masalani yechishning boshqa usullari mavjud. Ammo biz uni yechishning geometrik usulini tanladik.



8-rasm

8-rasmga e'tibor bering.

AA_1A_2B yopiq siniq chiziq uchun

$AA_1+A_1A_2+A_2B\ge AB$, $AC=1$, $BC=3$

$AA_1=\sqrt{1+x^2}$, $A_1A_2=\sqrt{1+y^2}$, $A_2B=\sqrt{1+z^2}$,

$AB=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$ demak,

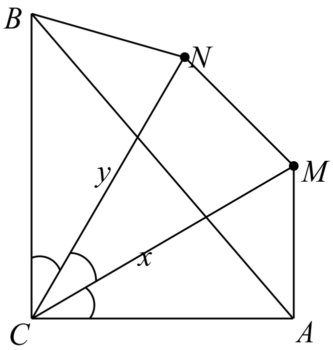
$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+z^2}\ge\sqrt{10}$

$$\min\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+z^2}\right)=\sqrt{10}$$

ixtiyoriy x va y lar uchun

$$\sqrt{9+x^2-3\sqrt{3}x}+\sqrt{x^2+y^2-xy\sqrt{3}}+\sqrt{16+y^2-4\sqrt{3}y}$$

ifodaning eng kichik qiymatini topish talab etilsin.



Yechish. ABC to'g'ri burchakli uchburchakni qaraymiz. Uning katetlari $AC=3$, $BC=4$ (9-rasm).

To'g'ri burchakni teng uch bo'lakka bo'lib, hosil bo'lgan nurlardan $CM=x$, $CN=y$ (agar x va y manfiy bo'lsa, ular qarshi tomonga qo'iladi).

Kosinuslar teoremasiga ko'ra,

9-rasm

$$AM = \sqrt{9 + x^2 - 3\sqrt{3}x}, \quad MN = \sqrt{x^2 + y^2 - xy\sqrt{3}}, \quad NB = \sqrt{16 + y^2 - 4\sqrt{3}y}$$

$$AM + MN + NB \geq AB, \qquad AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\min\left(\sqrt{9 + x^2 - 3\sqrt{3}x} + \sqrt{x^2 + y^2 - xy\sqrt{3}} + \sqrt{16 + y^2 - 4\sqrt{3}y}\right) = 5$$

$X = CM$, ACN uchburchak bissektrisasi, $y = CN$, BCM bissektrisasi bo‘lganligi sababli

$$X = \frac{3y\sqrt{3}}{3 + y}, \quad y = \frac{4x\sqrt{3}}{4 + x}$$

oxirgi sistemani yechib,

$$X = \frac{24}{3 + 4\sqrt{3}}, \quad y = \frac{24}{4 + 3\sqrt{3}}$$

Xulosa. Shunday qilib, biz bu maqolada masalalar yechish orqali talabaning iqtisodiy tarbiyasini shakllantirish, fanga bo‘gan qiziqishini rivojlantirish, matematikadan masalalar yechish tajribasini takomillashtirish mumkinligi haqida so‘z yuritdik.

Bu turdagi masalalardan talabaning iqtisodiy bilimlari matematika fanlarining o‘zaro bog‘liqligini mukammal o‘rganishga bog‘liqligi kelib chiqadi.

Foydalingan adabiyotlar

1. В.В.Трофимов. “Царевна Дидона, изопериметры и мыльные пленки” // Квант 1985, №5. 22-25 betlar.
2. В.Тихомиров. “Геометрия или анализ” Квант 1992, №2. 11-17 betlar.
3. A.Raximov, Sh.Saipnazarov. “Planimetrik masalalarni yechishda aylananing roli” // Pedagogik ta’lim, 2012, №2. 49-53 betlar.
4. А.Савин. «Зеркальная симметрия» // Квант 1992, №3. 40-41 betlar.
5. В.Смилга «Как начиналась геометрия» // Квант 1992, №2. 11-17 betlar.
6. Д.В.Фомин «Криминальная геометрия или дело принципа» // Квант 1989, №8. 47-51 betlar.
7. И.Ф.Шарыгин «Задачи по геометрии» (планиметрия) М.: «Науки» 1986.
8. Sh.Saipnazarov, A.Raximov. «Matematikani o‘qitishda masalalar yechishni o‘rganish metodi haqida» // Pedagogik ta’lim, 2010 y., №4. 58-62 betlar.