ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ

ГЕОМЕТРИЯ ДАРСЛАРИДА ИНТЕРФАОЛ МЕТОДЛАРДАН ФОЙДАЛАНИШ

Саипназаров Шайловбек Актамович
педагогика фанлари номзоди, доцент, Тошкент давлат иқтисодиёт университети
shaylovbek.s.a@gmail.com
Ходжабаева Дилбар Казахбаевна
катта ўқитувчи, Тошкент давлат иқтисодиёт университети
dxodjabaeva@gmail. com
Усаров Журабек Абдуназирович
Ассистент ўқитувчи, Тошкент давлат иқтисодиёт университети
jurabek0117@gmail.com

Аннотация. Мазкур мақола геометрияни ўқитишда интерфаол методлардан фойдаланишга бағишланган бўлиб, унда геометриянинг планиметрия ва стреометрия бўлимларини шу методлар ёрдамида ўргатишга доир намуна сифатида масалалар кўрсатилган. Муаммони қўйиш ва уни ҳал қилиш алгоритми кўрсатилган.

Калит сўзлар: эвристик метод, фаол метод, айлана, конус кесимлари, геометрик алмаштиришлар методи.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНТЕРАКТИВНЫХ МЕТОДОВ НА УРОКАХ ГЕОМЕТРИИ

Саипназаров Шайловбек Актамович
кандидат педагогических наук, доцент ТГЭУ
shaylovbek.s.a@gmail.com
Ходжабаева Дильбар Казахбаевна
старший преподаватель, ТГЭУ
dxodjabaeva@gmail.com
Усаров Джурабек Абдуназирович
Преподаватель, ТГЭУ
jurabek0117@gmail.com

Аннотация. Данная статья посвящена использованию интерактивных методов в обучении геометрии, в которой представлены вопросы на примере обучения разделов геометрической планиметрии и стриометрии с использованием этих методов. Показан алгоритм постановки задачи и ее решения.

Ключевые слова: эвристический метод, активный метод, круг, конусные сечения, метод геометрической подстановки.

USING INTERACTIVE METHODS IN GEOMETRY LESSONS OF PYHSICS AND MATHEMATICS FIELD

Saipnazarov Shaylovbek Aktamovich
Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of TSUE
shaylovbek.s.a@gmail. com
Khodzhabaeva Dilbar Kazakhbaevna
Senior Lecturer, TSUE
dxodjabaeva@gmail. com
Usarov Jurabek Abdunazirovich
Lecturer, TSUE
jurabek0117@gmail. com

Annotation. This article is devoted to the use of interactive methods in teaching geometry, and these methods present questions on the example of teaching sections of geometric planimetry and striometry. An algorithm for setting the problem and its solution are shown as well.

Keywords. Heuristic method, active method, circle, taper sections, geometric substitution method.

Геометрияни муаммоли ўқитиш (планиметрия)

Геометрияни ўқитиш методикасига бағишланган психология тадқиқотларда асосий йўналишлардан бири “Муаммоли ўқитиш” ҳисобланади. Муаммоли ўқитиш ғояси ҳозир янгилик эмас. Аммо ҳозирги кунда академик лицейлар, олий ўқув юртларида ҳам математика ва бошқа фанларни ўқитиш асосий ўрин эгаллайди.

Муаммоли ўқитишнинг долзарблиги шундаки, бунда талаба ўқитиш жараёнида изланади, тадқиқот тавсифидаги ҳолатларни юзага келтиради.

Олий ўқув юрти, академик лицейлар математика курсида талаба-ўқувчи дарс мобайнида фаол иштирок этмаса ва мустақил масала ечишга интилмаса, чуқур мулоҳаза қилишни ўрганмаса ўқитиш самарали ҳисобланмайди.

Ўқитувчи томонидан қўйилган муаммоли ҳолатни таҳлил қилиш шуни кўрсатадики, нафақат муаммони ечиш усулларини топиш, балки маълум ҳолатларни умумлаштириш ёки бошқа ҳолатлар билан таққослаш ва бу муаммо орқали бошқа муаммони кўра билиш ва уни мақсадли ўрганиш зарурати туғулади.

Таълим муассасаларида муаммоли тавсифдаги замонавий ўқитишни ташкил этишда ўқитишнинг эвристик методи ҳар қандай талабга жавоб беради. Эвристик метод-бу “Янгилик очиш”, “Фаол ўқитиш методи” сифатида қабул қилинади.

Геометрия дарсини муаммоли ўқитиш кўринишида қандай қуриш мумкинлиги қуйидаги схемада келтирилган.

1. Муаммоли ўқув ҳолатини ташкил этиш;
2. Муаммони қўйилиши ва уни тизимлаштириш;
3. Муаммони тавсифловчи шартларни ўрганиш;
4. Қўйилган муаммони ечиш:

а) муаммони муҳокама қилиш ва уни ечимини топишни ишлаб чиқиш;

б) муаммони тизимлаштириш, уни ечиш учун зарурий маълумотлар танлаш;

в) муаммони ечиш режасини ишлаб чиқиш.

5. Ҳосил қилинган ечимини хаққонийлигини асослаш;
6. Муаммони ечиш давомидаги изланишлар, янги билим қирраларини очиш ва унинг натижалари;

7. Махсус танланган масалани ечиш мобайнида янги билимларни амалий татбиқлари;

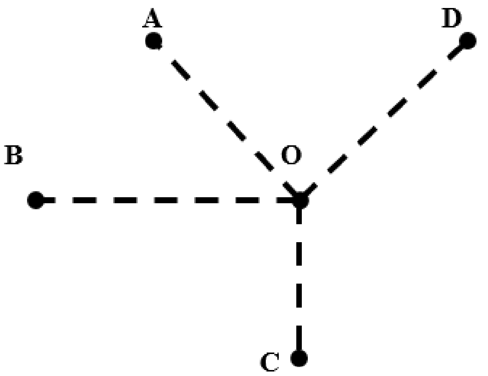
8. Қўйилган муаммони умумлаштириш, уни кенгайтириш имкониятларини ўрганиш;

9. Ечилган муаммони ўрганиш ва унданда самарали ечим усулларини топиш;

10. Қилинган ишларни жамламаси.

Юқоридаги режа асосида “Ички чизилган тўртбурчаклар” мавзусини ўрганамиз:

1. Ўқитувчи қишлоқ аҳолисининг деҳқон бозоридан энг қулай фойдаланишлари учун деҳқон бозорини шу қишлоқлар орасининг қаерига қуриш лозим.



1-расм

2. Талабалар қишлоқлардан деҳқон бозори бир хил масофада бўлишини англаб етади. Натижада тўртта нуқтадан битта айлана ўтказиш муаммоси келиб чиқади. Қишлоқларни *A, B, C, D* нуқталар, бозорни *O* нуқта билан белгилаймиз (1-расм).

3. Бу муаммони муҳокама қилиш мобайнида текисликнинг берилган нуқтасидан берилган масофада жойлашган нуқталар тўплами айлана эканлиги аниқланади, шунинг учун *A, B, C, D* нуқталар айлананинг нуқталари, *O* нуқта эса айлананинг маркази бўлиб, унинг ҳолати аниқланмаган, яъни *O* нуқта номаълум.

4. Талабалар муаммони ҳал қилишга астойдил киришиб, улар муаммо билан боғлиқ бўлган ўзларига олдиндан маълум бўлган тасдиқ ва далилларни эслайди:

а) битта нуқта ва айлана берилган бўлсин. Нуқта ва айлананинг жойлашиши бўйича учта мумкин бўлган ҳоллар мавжудлиги аниқланади.

Айтайлик, маркази *O* нуқтада радиуси *r* бўлган (*O, r*) айлана берилган бўлсин.

A нуқтани ихтиёрий равишда олиб, *OA* масофани *d* билан белгилаймиз.

У ҳолда,

агар $d<r$ бўлса, *A* нуқта айлана ичида ётади;

агар $d=r$ бўлса, *A* нуқта (*O, r*) айланада ётади;

агар $d>r$ бўлса, *A* нуқта (*O, r*) айлана ташқарисида ётади. Бу ерда ушбу саволлар туғулади:

Берилган нуқта орқали нечта айлана ўтказиш мумкин?

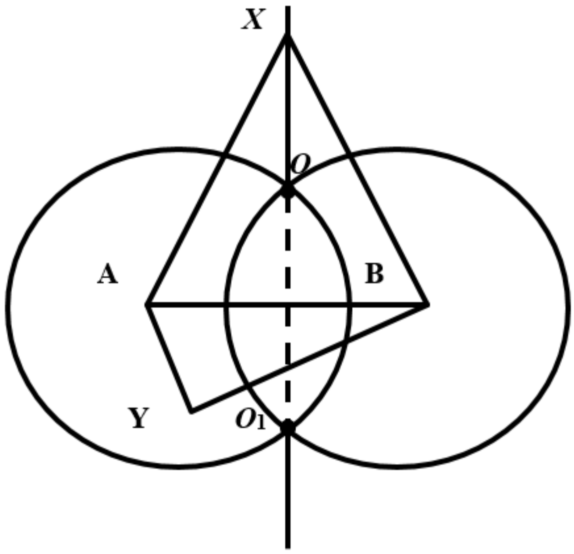
Уларнинг маркази қаерда ётади?

Берилган радиус ва битта нуқта орқали нечта айлана ўтказиш мумкин?

Агар битта нуқта берилса, у ҳолда бу нуқта орқали ҳоҳлаганча айлана ўтказиш мумкин (уларнинг марказлари танланган ихтиёрий нуқтада бўлади);

б) битта айлана ва икки нуқта берилган бўлсин. Бу нуқталарни *A* ва *B* деб белгилаймиз. Юқоридаги мулоҳазадан биз биламизки, агар битта нуқта берилса, бу нуқта орқали ҳоҳлаганча айлана ўтказиш мумкин, уларнинг марказлари ҳоҳлаган жойда ётади. Табиийки, савол туғулади: бу айланалар ичида *A* ва *B* нуқталардан ўтадиганлари борми, агар бўлса улар нечта ва уларнинг марказлари каерда ётади?

Бундай айлананинг *O* маркази *A* ва *B* нуқталардан бир хил узоқликда ётиш кераклиги, яъни $OA=OB$ тенгликни бажарилиши аниқланади. Бундай *O* нуқтани қандай ясаймиз? Ясаш методларига аниқлик киритилади:



2-расм

AB кесма узунлиги ярмидан каттароқ радиусда *A* ва *B* нуқталарни марказ қилиб айланалар чизамиз. Уларнинг кесишган *O* ва O_1 нуқталари берилган нуқталардан бир хил масофада бўлади. Шундай қилиб, биз *A* ва *B* нуқталардан ўтувчи иккита айланага эга бўлдик (2-расм).

Талабалар ўқитувчининг қуйида берилган саволлари бўйича тадқиқотлар олиб боради.

O ва O_1 нуқталар *AB* кесмага нисбатан қандай жойлашган?

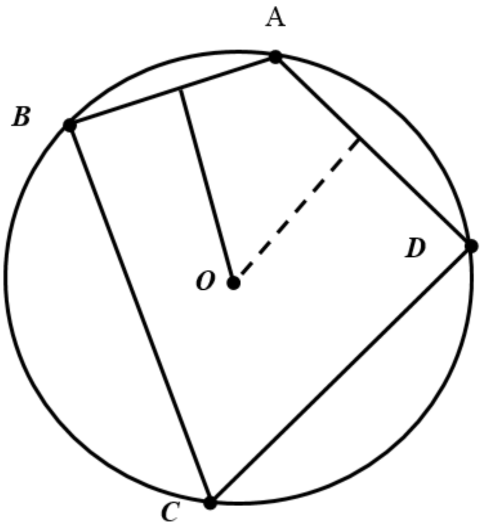
AB кесманинг ўрта перпендикуляр OO_1 га тегишли ҳар қандай X нуқта *A* ва *B* нуқталардан ўтувчи айлананинг маркази бўладими? Ҳар қандай *A* ва *B* нуқталардан ўтувчи айланаларнинг марказлари OO_1 ўрта перпендикулярда ётадими? Агар $Y \notin OO_1$ бшлса, у ҳолда $YA \neq YB$ эканлигини исботланг.

A ва *B* нуқталардан ўтувчи ва берилган радиусдаги айланани ясаш масаласини кўриш, қандай шартларда масала ечимга эга ва нечта ечим мавжудлигини аниқлаш масаласини кўриш мақсадга мувофиқ бўлади.

в) айлана ва учта нуқта берилган бўлсин. Берилган учта нуқтадан ўтувчи айлана мавжудми, агар мавжуд бўлса, бундай айланалар нечта деган саволга жавоб бериш учун юқоридаги б) шартнинг натижасидан фойдаланамиз. Ҳар қандай учта *A, B, C* нуқталарнинг ҳар қандай иккитасидан чексиз кўп айлана ўтказиш мумкин. Уларнинг марказлари ўрта перпендикулярда ётади.

Иккита ўрта перпендикуляр оламиз, масалан *AB* ва *BC* кесмаларга нисбатан. Бу перпендикуляр ё битта нуқтада кесишади ёки параллел бўлади. Биринчи ҳолда ўрта перпендикулярнинг кесишган нуқтасидан *A, B, C* нуқталар бир хил масофада ётади, яъни бу нуқта учинчи AC кесмага утказилган ўрта перпендикулярда ҳам ётади. Демак, *A, B, C* нуқталардан ўтувчи ягона айлана мавжуд. Иккинчи ҳолда, агар *AB* ва *BC* кесмаларга ўрта перпендикуляр параллел бўлса, у ҳолда бу кесмаларнинг ўзлари параллел тўғри чизиқларда ёки битта тўғри чизиқда ётади. Қаралаётган кесмалар умумий *B* нуқтага эга, демак, улар битта тўғри чизиқда ётади. Шундай қилиб, *A, B, C* нуқталар бир тўғри чизиқда ётса, улар орқали ҳеч қандай айлана ўтказиб бўлмайди.

г) айлана ва тўртта нуқта берилган бўлсин. Агар *A, B, C, D* нуқталардан қандайдир, учтаси бир тўғри чизиқда ётса, у ҳолда юқоридаги в)га кўра бу учта нуқтадан бирорта ҳам айлана ўтмайди. Фараз қилайлик, тўртта нуқталардан ҳеч қандай учтаси бир тўғри чизиқда ётмасин. У ҳолда, айтайлик, *A, B, C* нуқталардан ягона айлана ўтади ва тўртинчи *D* нуқта бу айлана ичида, унинг ташқарисида ёки айланада бўлиши мумкин.



3-расм

Табиийки, бизни оҳирги ҳол қизиқтиради. Шундай қилиб *ABCD* тўртбурчакка ташқи айлана чизиш мумкинлиги ҳақидаги шарт вужудга келади. Агар *D* нуқта айланага тегишли бўлса, у ҳолда *ADC* бурчак ички чизилган бўлади. Бу ҳолат изланишни осонлаштиради, демак, бурчаклар орасидаги муносабатни излаш лозим деган фикр келади. Изланишнинг зарурий йўналиши керакли тасдиқни ҳал қилиш имконини беради: ички чизилган тўртбурчакни қарама-қарши бурчакларининг йиғиндиси 180^0 га тенг бўлади. Бу тасдиқни исботлаймиз. Агар *ABCD* тўртбурчак ички чизилган бўлса, у ҳолда унинг бурчаклари қандай бўлади? *BAD* бурчакнинг катталиги *BCD* ёйининг бурчак катталигининг ярмига тенг (3-расм).
C бурчак ҳам ички чизилган бўлганлиги учун унинг катталиги $\frac{1}{2}\overset{\smile}{BAD}$ билан ўлчанади. Бундан келиб чиқадики, *A* ва *C* бурчакларнинг йиғиндиси $\frac{1}{2}\overset{\smile}{BCD}$ ва $\frac{1}{2}\overset{\smile}{BAD}$ бурчаклар йиғиндиси билан ўлчанади.

$$\frac{1}{2}\overset{\smile}{BCD}+\frac{1}{2}\overset{\smile}{BAD}=\frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{BCD}+\overset{\smile}{BAD}\right)$$

$\overset{\smile}{BCD}$ ва $\overset{\smile}{BAD}$ ёйлар йиғиндисининг бурчак ўлчови 360^0 га тенг бўлганлигидан *A* ва *C* бурчакларнинг йиғиндиси 180^0 га тенг бўлади. *B* ва *D* бурчаклар йиғиндисини 180^0 га тенг бўлиши худди шунга ухшаш кўрсатилади.

A ва *C, B* ва *D* нуқталар қарама-қарши бурчаклар эканлигини назарда тутамиз.

5. Бу муаммони ҳал қилиш натижасида ички чизилган тўртбурчакнинг янги ҳоссаси яратилади: ички чизилган тўртбурчакнинг қарама-қарши бурчакларининг йиғиндиси 180^0 га тенг.

6. Ўқитувчи аудиторияга мурожаат қилади: “Берилган тасдиқга тескари тасдиқ ўринлими?”, “Агар ўринли бўлса, исботланг” (Агар қавариқ тўртбурчакда қарама-қарши бурчаклар йиғиндиси 180^0 га тенг бўлса, у ҳолда бу тўртбурчакка ташқи айлана чизиш мумкин).

Талабалар тасдиқни тўғри эканлигини исботлайди ва тўртта нуқтанинг айланада ётишининг зарурий ва етарлилик шартини аниқлайди.

7. Аниқ қўйилган масалага қайтиб, яна ечилмаган савол қолганини уқтирамиз, бу айлананинг марказини қандай топамиз. Талабалар учта нуқтадан ўтган айлана маркази қандай топилганини эслайди. (Икки томонининг ўрта перпендикулярини ўтказиш лозим, уларнинг кесишган нуқтаси айлана маркази бўлади). Сўнгра буни тўртта нуқтадан ўтувчи айлана учун қўллаш мумкинми?-деган саволга жавоб топиш керак бўлади. *A*, *B, C* нуқталардан ўтувчи айлана маркази топилади, тўртинчи *D* нуқта шу айланада ётадими?

8. Талабаларга *D* нуқтанинг ҳолатини бу айланага нисбатан текшириш таклиф қилинади.

9. Юқоридаги теоремаларни қўлланилишига доир мустақил равишда масала ўйлаш ва уни ечиш таклиф қилинади.

10. Ўрганилган мавзу бўйича якуний хулоса чиқарилади. Муаммоли ўқитиш ушбу таркибий режа асосида амалга оширилиши мумкин:

1. Муаммоли ҳолатни ташкил этиш учун қуйидагиларга эътибор бериш керак:

а) талабадан ечим талаб қиладиган муаммони аниқлаш;

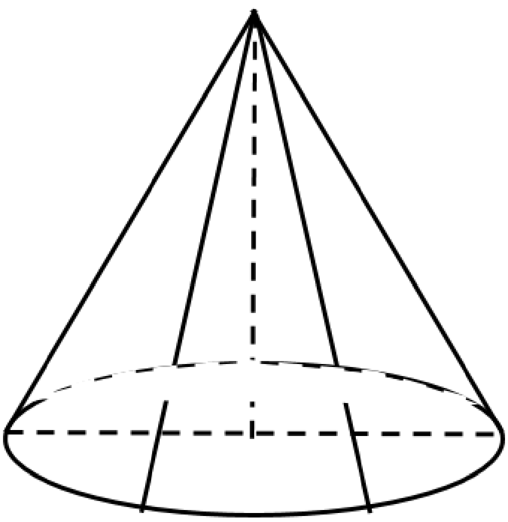
б) талабаларни муаммога қизиқтириш, уларга қўйилган масалани ечишга чақириш.

2. Муаммони ечишга йўналтириш, муаммони хусусий муаммоларга ажратиш ва уларни ечиш кетма-кетлигини аниқлаш.

3. Жамоавий, гуруҳ, якка тартибда хусусий муаммоларни ҳал қилиш, ечим натижасини текшириш ва ҳатоларни тўғрилаш.

4. Хусусий муаммолар ечимларини топишда натижаларни бирлаштириш.

Конус ва унинг кесимлари (стреометрия)

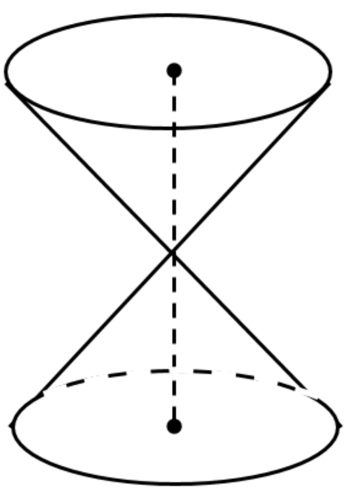


1-расм

1. Бу ерда ўқитувчи томонидан қўйиладиган муаммо тўғри доиравий конуснинг кесимлари қандай чизиқлардан иборат эканлиги.

2. Талабалар тўғри доиравий конус-тўғри бурчакли учбурчакни унинг катетларидан бири атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган фигура эканлигини, конуснинг ҳар қандай ўқ кесими тенг ёнли учбурчакдан иборатлигини, конус сирт ҳосил қилувчи тўғри чизиқлар унинг ясовчилари эканлигини англаб етади.

3. Муаммони муҳокама қилиш ва ўқитувчи ёрдамида конус кесмалари-доиравий конусни унинг учидан ўтмайдиган текислик билан кесганда ҳосил бўладиган эгри чизиқлар эканлиги т ушунтирилади (1-расм).



2-расм

4. Талабалар муаммо билан боғлиқ бўлган ўзларига олдиндан маълум бўлган текисликдаги эгри чизиқларни эслайди:

а) агар кесувчи текислик конус ўқига перпендикуляр бўлса, кесимда айлана, агар перпендикуляр бўлмаса, кесимда эллипс ҳосил бўлади;

б) ясовчи ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган конус икки паллали дейилади (2-расм).

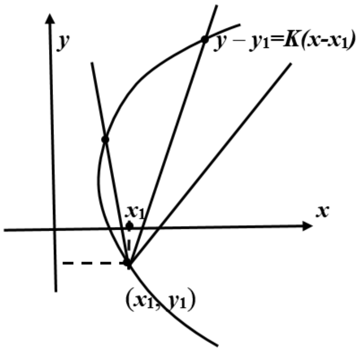
Конусни текислик билан кесганда ҳосил бўладиган чегараланган фигуралар эллипслар, чегараланмагани эса (агар кеувчи текислик конуснинг иккала палласини кесса) гиперболалар ва параболалар (агар кесувчи текислик конуснинг фақат битта палласини кесса) ҳосил бўлади.

5. Қўйилган муаммони ҳал қилиш натижасида конуснинг кесимлари айлана, эллипс, парабола ва гипербола эканлиги аниқланади.

6. Ўқитувчи талабаларга мурожаат қилиб янги муаммо ҳақида сўз юритади: Конус кесимларига тегишли бўлган рационал нуқтани топиш мумкинми? Топиш мумкин бўлса, у қандай топилади?

7. Қўйилган янги муаммони ҳал қилишга бутун аудитория астойдил киришади.

Бу муаммони ҳал қилиш учун текисликдаги $K(x, y)=0$ кўринишдаги чизиқни қараймиз. Бунда $K(x, y)$-конус кесимини ифодалайдиган x ва y га боғлиқ бўлган иккинчи тартибли кўпҳад. Парабола, эллипс, гиперболага тегишли бўлган нуқталар бу тенгламани қаноатлантиради. Фарз қилайлик, (x_1, y_1) нуқта шундай эгри чизиқнинг тайинланган нуқтаси бўлсин. Бу нуқта орқали бурчак коэффициенти K бўлган тўғри чизиқ ўтказамиз (3-расм).



3-расм

Эгри чизиқ ва тўғри чизиқнинг кесишган нуқтаси (x, y) ни излаймиз. Бу нуқтанинг координаталари ушбу тенгламалар системасини қаноатлантиради.

$$\begin{cases} K(x,y)=0 \\ y-y_1=K(x-x_1) \end{cases}$$

Бу системани (x, y) га нисбатан ечиб (x_2, y_2) нуқтанинг координаталарини $y=y_1+K(x-x_1)$ тўғри чизиқ ва эгри чизиқ билан кесишган нуқтасини K параметр орқали ифодалаймиз. Қуйидаги кўринишдаги ифода ҳосил бўлади

$$(x_2,y_2)=\left(\frac{A(K)}{C(K)};\frac{B(K)}{C(K)}\right) \qquad (*)$$

Бунда $A(K)$, $B(K)$, $C(K)$ даража кўрсаткичи 2 дан катта бўлмаган K параметрга боғлиқ кўпҳадлар. Бу формула эгри чизиқдаги нуқта координаталарини битта K параметр орқали рационал функцияни ифода этади.

Масалан $K(x, y)=x^2+y^2-1$, $(x_1, y_1)=(-1; 0)$ нуқтадан тўғри чизиқлар ўтказамиз. $(-1; 0)$ нуқтадан ўтувчи (айланага уринмайдиган) тўғри чизиқ $K(x, y)=0$ чизиқни, яъни $x^2+y^2=1$ ни яна битта нуқтада кесиб ўтади. Шундай қилиб, (x_2, y_2) нуқтанинг координаталари ушбу системани қаноатлантиради

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=K(x+1) \end{cases}$$

$$(1+K^2)x^2+2K^2\cdot x+K^2-1=0$$

Тенгламага эга бўламиз. $x=x_1=-1$ ёки $x=x_2$ Виет теоремасидан

$$x_1+x_2=-\frac{2K^2}{1+K^2}$$

бунда

$$x_2=\frac{1-K^2}{1+K^2}$$

(x_2, y_2) нуқта $y=K(x+1)$ тўғри чизиқда ётганлигидан

$$y_2=\frac{2K^2}{1+K^2}.$$

Шундай қилиб,

$$(x_2;y_2)=\left(\frac{1-K^2}{1+K^2};\frac{2K}{1+K^2}\right)$$

8. Конус кесимларини топиш муаммоси натижасида (*) формулани интегрални ҳисоблашга тадбиқ этиш мумкинлиги кўриниб қолади.

$J=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}$ интегрални ҳисоблаш талаб қилинаётган бўлсин. $y=x^2+3x-4$ чизиқда $(x_1; y_1)$ =(-4; 0) нуқта ётади. Юқоридаги формулани топиш қоидасига кўра

$$K(x, y) = y^2-(x^2+3x-4)$$

Ушбу

$$\begin{cases} y^2 = x^2+3x-4 \\ y = K(x+4) \end{cases}$$

системани ечиб

$$(x; y) = \left(\frac{1+4K^2}{1-K^2}; \frac{5K}{1-K^2}\right)$$

ҳосил қиламиз.

$$x=\frac{1+4K^2}{1-K^2},\ dx=\frac{8K\left(1-K^2\right)-\left(1+4K^2\right)\left(2-K\right)}{\left(1-K^2\right)}dK=\frac{8K-8K^3+2K+8K^3}{\left(1-K^2\right)^2}dK=\frac{10K}{\left(1-K^2\right)^2}dK$$

ва шунинг учун

$$J=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}=\int \frac{dx}{y(x)}=\int \frac{2dK}{1-K^2}$$

охирги интегрални ҳисоблаш қийин эмас

$$\int \frac{2dK}{1-K^2}=\int \frac{dK}{1-K}+\int \frac{dK}{1+K}=\ln|1+K|-\ln|1-K|+C=\ln\left|\frac{1+K}{1-K}\right|+C,\ K=\frac{y}{x+4}=\frac{\sqrt{x^2+3x-4}}{x+4}$$

эканлигини ҳисобга олиб

$$J=\ln\left|\frac{x+4+\sqrt{2^2+3x-4}}{x+4-\sqrt{x^2+3x-4}}\right|+C$$

ёки

$$J=\ln\left|\frac{\left(x+4\right)^2+2(x+4)\sqrt{2^2+3x-4}+x^2+3x-4}{\left(x+4\right)^2-\sqrt{x^2+3x-4}}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{\left(x+4\right)^2+2(x+4)\sqrt{x^2+3x-4}+(x+4)(x-1)}{5\left(x+4\right)}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{x+4+2\sqrt{x^2+3x-4}+x-1}{5}\right|+C=\ln\left|\frac{2x+3+2\sqrt{x^2+3x-4}}{5}\right|+C=$$

$$=\ln\left|2x+3+2\sqrt{x^2+3x-4}\right|+C$$

9. Юқоридаги формулани қўлланилишига доир мустақил равишда масала ўйлаш ва уни ечиш таклиф этилади.

10. Ўрганилган мавзу бўйича якуний хулоса чиқарилади. Конус кесимларини битта эгри чизиқ ёрдамида умумлаштириш мумкинми?

Турли конус кесимларини ҳосил қилишнинг бир хил усули бу эгри чизиқларни тасвирловчи тенгламаларнинг ўхшашлигини таъминлайди. Кесувчи текисликда координаталар системасини конус кесимининг тенгламаси $y^2=2px+\lambda x^2$ кўринишни оладиган қилиб танлаш мумкин, бунда p ва λ ўзгармас сонлар. $\lambda=0$ да $p\neq 0$ бўлса, бу тенглама параболани, $\lambda<0$ да эллипсни, $\lambda>0$ да гиперболани аниқлайди.

Конус кесимларига математикларнинг бунчалик қизиқиб қолишларига сабаб, агар кесувчи текисликдаги ихтиёрий Декарт координаталар системасида конус кесимининг тенгламаси ёзилса, у ҳолда бу тенглама ҳамма вақт иккинчи тартибли алгебраик тенглама, яъни

$$a\,x^2+bxy+cy^2+cy+f=0$$

кўринишда бўлади.

Аксинча, бу тенглама ифодалайдиган эгри чизиқ ҳар доим, коэффициентлари маълум шартлар билан боғланган баъзи ҳоллардан ташқари, конус кесими бўлади.

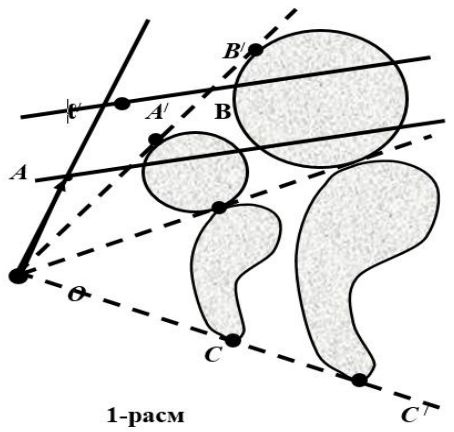
Геометрик алмаштиришлар ёрдамида масалалар ечиш

Ҳозирги кунда инновацион технологиялар, интерфаол услубларнинг сони жуда кўпайиб кетди. Таълим жараёнида интерфаол услублардан фойдаланиб, таълимнинг самарадорлигини кўтаришга бўлган қизиқиш, эътибор кундан-кунга кучайиб бормоқда. Замонавий технологиялар қўлланилган машғулотлар талабалар эгаллаётган биилмларни ўзлари қидириб топишларига, мустақил ўрганиб, таҳлил қилишларига, ҳатто хулосаларни ҳам ўзлари келтириб чиқаришларига келтирилган. Ўқитувчи бу жараёнда шахс ва жамоанинг ривожланиши, шаклланиши, билим олиши ва тарбияланишига шароит яратади, шу билан бир қаторда бошқарувчилик, йўналтирувчилик вазифасини бажаради.

Талабанинг қўйилган масалани қай даражада тушиниши унинг математик тайёргарлик даражасига боғлиқ. Одатда, масала қўйилганда унинг шартларидан фойдаланиб, теорема ёки тасдиқларни тўғридан тўғри қўллаш мумкин бўлмаган ҳолатлар юзага келиши мумкин. Бундай ҳолатдан чиқиб кетиш учун қўшимча геометрик алмаштириш ёки ясаш методларини қўллашга тўғри келади.

Қўйилган масалани ечишга киришишдан аввал талабаларга қандай геометрик алмаштиришларни биласиз тарзида савол берилади. Геометрик алмаштиришлар таърифлари ва ҳоссалари ҳақидаги мулоҳазалардан сўнг, ўқитувчи геометрик алмаштиришлар ҳақида қисқача маълумот беради.

Текисликни геометрик алмаштириш-текисликнинг ўз устига ўзаро бир қийматли акслантиришидир. Энг муҳим геометрик акслантиришлар- ҳаракатлар, яъни масофани сақлайдиган акслантиришлардир. Аниқроқ қилиб айтганда, агар *f*-текисликнинг ҳаракати бўлса, бу текисликнинг ихтиёрий икки *A, B* нуқтаси учун *f(A)* ва *f(B)* нуқталар орасидаги масофа *AB* га тенг.



1-расм

Ўққа нисбатан ва марказий симметрия, параллел кўчириш, буриш текислик ҳаракатининг намуналари бўлади. Текисликни геометрик алмаштиришларининг аҳамияти жиҳатидан навбатдаги гуруҳини ўхшаш алмаштиришлар ташкил этади. Улардан энг соддаси геометрия. Қуйидаги таърифни олайлик: ихтиёрий олинган A нуқтани $\overrightarrow{OA^{/}} = K\overrightarrow{OA}$ шартни қаноатлантирувчи $A^{/}$ нуқтага ўтказадиган геометрик алмаштириш маркази O ва K ($K\neq0$) коэффициентли геометрия дейилади (1-расм).

Геометрия ҳар бир тўғри чизиқни унга параллел тўғри чизиққа, ҳар бир айланани яна айланага ўтказади. Геометрия бурчакларни сақлайди, узунликларни эса K марта катталаштиради: агар геометрия A, B нуқталар $A^{/}$, $B^{/}$ га ўтса, $A^{/}B^{/} = KAB$ бўлади. Бундан геометрия фигураларнинг шаклини сақлаши келиб чиқади;

масалан, агар $K>1$ бўлиб, O марказли, K коэффициентли гомотетияда F фигурани $F^{/}$ га ўтказса,

$F^{/}$ фигура F нинг катталашган нусхаси бўлади. $0<K<1$ ҳолда эса $F^{/}$ фигура F нинг кичиклашган нусхасидир.

Геометрияда барча узунликлар бир хил сон мартага ўзгарсада, узунликлар нисбати ўзгармайди.

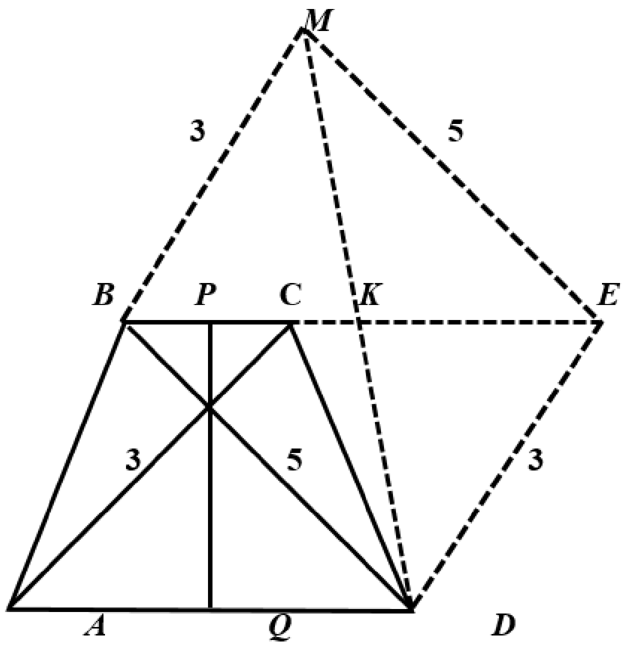
Агар α текисликнинг ихтиёрий A ва B нуқталари учун $f(A)$ ва $f(B)$ нуқталар орасидаги масофа $K{\cdot}AB$ га тенг бўлса, текисликнинг f алмаштириши $K>0$ коэффициентли ўхшашлик деб аталади. Ҳар қандай ухшашлик (унинг хусусий ҳоли-гомотетия сингари) бурчакларни ҳамда узунликларнинг нисбатини, яъни фигураларнинг шаклини сақлайди. Бироқ гомотетияда фарқли равишда ўхшашлик ℓ тўғри чизиқни унга параллел бўлмаган $\ell^{/}$ тўғри чизиққа ўтказиши мумкин.

Бу алмаштиришларни тадбиқини масалалар ечиш орқали кўрсатамиз.

1-масала. Трапециянинг диагоналлари 3 ва 5 га, асосларининг ўрталарини туташтирувчи кесма узунлиги эса 2 аг тенг. Трапециянинг юзини топинг.

Ечиш. $ABCD$($AD//BC$) трапецияни қараймиз. Q нуқта AD асоснинг, Р нуқта BC асоснинг ўртаси бўлсин. Трапециянинг асосларини a ва b ($a>b$) белгилаймиз. Масала шартига кўра AC=3, BD=5, PQ=2.

Масалани ечишда тўғридан-тўғри трапеция юзини топиш формуласини қўллай олмаймиз. Демак, геометрик алмаштириш методини қўллаймиз.



2-расм

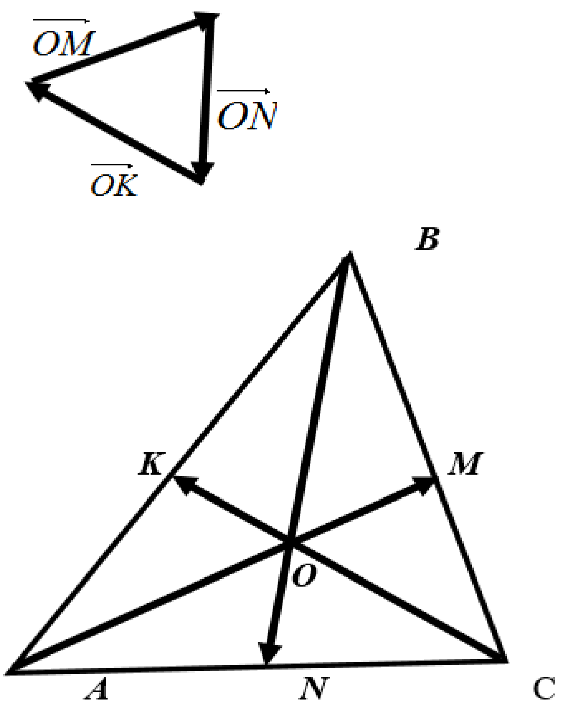
Дастлаб, D нуқтадан AC диагоналга параллел тўғри чизиқ ўтказамиз ва юқоридаги асоснинг давоми билан кесишган нуқтани E билан белгилаймиз. Натижада BDE учбурчакни ҳосил қиламиз (2-расм), шу учбурчак масаламизни осон ечишга ёрдам берувчи объект ҳисобланади. Берилган трапециянинг юзи ҳосил қилинган BDE учбурчакнинг юзига тенг, чунки трапеция ва учбурчак бир хил баландликларга эга, ҳамда учбурчакнинг асоси трапеция асосларининг йиғиндисига тенг. Демак, биз берилган трапециянинг юзини топишимиз учун ҳосил қилинган BDE учбурчакнинг юзини топишимиз лозим. Бу учбурчакнинг юзини иккита томони бўйича топа олмаймиз. Шунинг учун яна ясаш усулини қўллаймиз. *D* нуқтадан трапеция асосларининг ўрталарини туташтирувчи кесмага параллел тўғри чизиқ ўтказамиз, бу параллел тўғри чизиқнинг учбурчак асоси билан кесишган нуқтаси *К* бўлсин. *РК=a/2, BP*=б/2, демак, *BК=a+b/2*. Бундан *К* нуқта *BDE* учбурчакнинг *BE* томонини тенг иккига бўлиши келиб чиқади. Шундай қилиб биз *DК* кесма *BDE* учбурчакнинг медианаси эканлигини исботладик. Энди учбурчакни 3та чизиқли элементи бўйича еча оламиз. Бироқ ечимни яна ҳам осонлаштириш мақсадида, ҳосил қилинган *BDE* учбурчакнинг *BE* томонига нисбатан симметрик алмаштиришни бажариб, *DEMB* параллелограммни ҳосил қиламиз. *BDE* учбурчакнинг юзи бу параллелограмм юзининг ярмига тенг (*DК*=2, *DM*=4), иккинчи томондан *DEM* тўғри бурчакли учбурчакдир. Чунки *DE=AC=3, EM=BD=5* ва *DM*=4. Унинг юзи ҳам шу параллелограмм юзининг ярмига тенг.

$$S_{DEM} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4 = 6$$

Бундан изланаётган трапециянинг юзи 6 га тенглиги келиб чиқади.

2-масала. *ABC* учбурчакнинг ичида $\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\vec{O}$ тенглик бажариладиган қилиб *O* нуқта олинган, бунда *K, M, N* нуқталар *O* нуқтадан *ABC* учбурчакнинг *AB, BC, CA* томонларига ўтказилган перпендикулярнинг асослари. $\dfrac{OK+OM+ON}{AB+BC+CA}$ ифоданинг энг катта қийматини топинг.

Ечиш. Масала шартига кўра *OK*, *OM*, *ON* кесмаларга параллел ўтказиб, учбурчак ҳосил қилишимиз мумкин (3-расм). Бу учбурчакнинг томонларини90^0 га буриш орқали томонлари *ABC* учбурчакнинг томонларига параллел бўлган учбурчакни ҳосил қиламиз, бундан бу учбурчаклар ўхшаш эканлиги келиб чиқади. Ўхшашлик коэффициентини *K* билан белгилаймиз:



3-расм

$$K = \frac{OK}{AB} = \frac{OM}{BC} = \frac{ON}{CA}.$$

У ҳолда

$$K = \frac{OK+OM+ON}{AB+BC+CA}$$

бўлади. Иккинчи томондан *ABC* учбурчак юзи *S* ни *AOB, BOC* ва *COA* учбурчак юзларининг йиғиндисига тенглигидан

$2S = a\cdot OK + b\cdot OM + c\cdot ON = K(a^2+b^2+c^2)$,

бунда *a, b, c ABC* учбурчак томонларининг узунликлари шундай қилиб, берилган масала

$$S = \frac{K(a^2+b^2+c^2)}{2} \qquad (1)$$

кўринишга келди.

Герон формуласига кўра

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}\le\sqrt{P\left(\frac{P-a+P-b+P-c)}{3}\right)^3}=\frac{P^2}{3\sqrt{3}} \qquad (2)$$

(2) ни ўнг қисмини қуйидагича ёзамиз:

$$\frac{P^2}{3\sqrt{3}}=\frac{4P^2}{12\sqrt{3}}=\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+ca}{12\sqrt{3}}\le\frac{a^2+b^2+c^2+a^2+b^2+a^2+c^2+a^2+c^2+a^2}{12\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}{12\sqrt{3}}=\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)}{4\sqrt{3}}$$

демак (2)ни қуйидагича ёзамиз.

$$S\le\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)}{4\sqrt{3}} \qquad (2^*)$$

(2^*) ва (1) дан $2S\ge4\sqrt{3}S$ ёки $K\le\frac{1}{2\sqrt{3}}$ шундай қилиб,

$$\max\left(\frac{OK+OM+ON}{AB+BC+CA}\right)=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Алгебранинг шундай масалалари борки, уни геометрик усулда ечиш муаммони осон ҳал қилади. Шундай турдаги масалаларга мисоллар келтирамиз.

3-масала. Ушбу тенгламалар системасини ечинг.

$$\begin{cases}x^2+y^2=x^2-6x+13\\x^2+y^2=x^2-4y+13\end{cases}$$

Ечиш. Юқоридаги тенгламалар системасини $x^2+y^2=(x-3)^2+4=(y-2)^2+9$ кўринишда ёзиб оламиз.

Декарт координаталар системасида $A(3;\ 2)$, $B(x;\ 0)$, $C(0;\ y)$ нуқталарни қараймиз. Берилган системадан ABC учбурчак мунтазам эканлиги келиб чиқади. A нуқта атрофида B нуқтани мос йўналишда 60^0га буриш натижасида у C нуқтага ўтади.

Бу ерда биз нуқта атрофида буриш алмаштиришини, бундай ҳолда

$$3=x\cos60^0+y\sin60^0 \text{ ёки } 6=x+\sqrt{3}y$$

$$2=x\sin60^0+y\cos60^0 \text{ ёки } 4=\sqrt{3}x+y$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=x^2-6x+13 \\ 6=x+\sqrt{3}y \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2=y^2-4y+13 \\ 4=\sqrt{3}x+y \end{cases}$$

$$y=\frac{6-x}{\sqrt{3}} \qquad x=\frac{4-y}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{(6-x)^2}{3}=-6x+13 \qquad \frac{(4-y)^2}{3}=-4y+13$$

$$36-12x+x^2=-18x+39 \quad 16-8y+y^2=-12y+39$$

$$x^2+6x-3=0 \qquad y^2+4y-23=0$$

$$x_{1,2}=-3\pm 2\sqrt{3} \qquad y_{1,2}=-2\pm 3\sqrt{3}$$

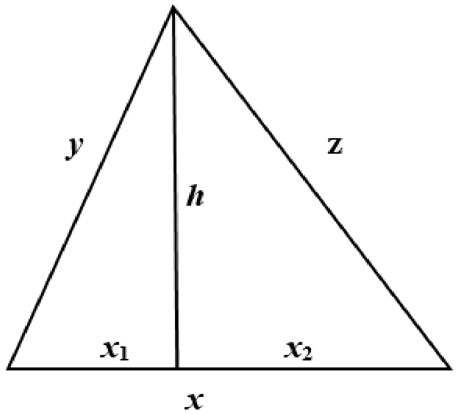
Юқоридаги системани алгебраик усулда ечиш жуда кўп ҳисоблашлар ва шакл алмаштиришларни талаб қилади (мустақил ечишга ҳаракат қилиб кўринг, Феррари усулини қўлланг).

4-масала. Ушбу тенгламалар системасини ечинг

$$\begin{cases} x=\sqrt{z^2-\frac{1}{9}}+\sqrt{y^2-\frac{1}{9}} \\ y=\sqrt{x^2-\frac{1}{16}}+\sqrt{z^2-\frac{1}{16}} \\ z=\sqrt{y^2-\frac{1}{25}}+\sqrt{x^2-\frac{1}{25}} \end{cases}$$

Ечиш. Кўриниб турибдики, бу системани алгебраик усулда ечиш қийин. Бу системани ечиш учун томонларининг узунликлари *x, y, z* ва баландликлари $\frac{1}{3},\frac{1}{4}$ ва $\frac{1}{5}$ га тенг бўлган ҳамда ўтмас бурчакли бўлмаган учбурчакни қараймиз.

Умуман, ҳар қандай ўткир бурчакли учбурчак учун x томонга туширилган h баландлик бўлса ва бу баландлик x томонни x_1 ва x_2 бўлакларга ажратса, ушбу тенгламалар ўринли: $\mathrm{x}=\mathrm{x}_1+\mathrm{x}_2$, $\mathrm{x}_1=\sqrt{y^2-h^2}$, $x_1=\sqrt{z^2-h^2}$



4-расм

Шундай қилиб, ҳақиқатан ҳам бу катталиклар юқоридаги тенгламалар системасини қаноатлантиради.

Демак, юқоридаги тенгламалар системасини ечиш баландликлари $\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ \frac{1}{5}$ га тенг бўлган учбурчакнинг томонларини топишга келтирилади.

Берилган учбурчак томонлари унинг баландликларига тескари пропорционал бўлганлигидан, бу учбурчак томонлари $\frac{1}{3},\frac{1}{4}$ ва $\frac{1}{5}$ сонларига тескари бўлган учбурчакка ухшашдир. Яъни, томонлари *x, y* ва *z* бўлган учбурчак томонлари 3, 4 ва 5 га тенг бўлган учбурчакка ухшаш. Кўриниб турибдики, томонлари 3, 4 ва 5 га тенг бўлган учбурчак тўғри бурчакли. Унинг юзи $S=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=6$.

Демак, берилган учбурчак ҳам тўғри бурчакли бўлганлигидан унинг иккита баландлиги томонлари билан устма-уст тушади, яъни $x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{1}{3}$.

У ҳолда

$$z=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{9}}=\frac{5}{12}.$$

Умумий ҳолда *x, y* ва *z* ларни учбурчакларнинг ўхшашлик шартлари ва учбурчак юзини ҳисоблаш формуласидан фойдаланиб топамиз. Демак, юқоридаги системанинг ечими $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{3};\frac{5}{12}\right)$дан иборат экан. Юқоридаги услубнинг моҳияти шундаки, бунда ўқув фани ёки бўлим барча мавзуларини талабалар томонидан эсга олиш, геометрик алмаштириш мавзуси бўйича ўқитувчи томонидан берилган тушунчаларга мустақил равишда ўз изоҳларини бериш, шу орқали ўз билимларини текшириб баҳолашга имконият яратиш ва ўқитувчи томонидан қисқа вақт ичида барча талабаларни баҳолай олишга йўналтирилган.

Услубнинг мақсади эса, талабаларни машғулотда ўтилган мавзуни эгаллаганлик ва мавзу бўйича таянч тушунчаларни ўзлаштириб олинганлик даражаларини аниқлаш, геометрик тасаввурларини, далилларни, теоремаларни масала ечишга тадбиқ эта олишни, шунингдек ўз билимларини бир тизимга солишга ўргатиш.

Адабиётлар

1. Saipnazarov Shaylovbek Aktamovich, Gulamov Akromjon Rustamovich.. INTEGRATION OF NON-GEOMETRIC AND GEOMETRIC METHODS. JCR. 2020; 7(6): 477-480. doi: 10. 31838/jcr. 07.06.86

2. Saipnazarov Shaylovbek Aktamovich. APPLICATION OF INEQUALITY European Journal of Research and Reflection in Educational Sciences Vol. 7 No. 10, 2019 Special Issue: Educational Issues in Uzbekistan ISSN 2056-5852 Progressive Academic Publishing, UK Page 32 www.idpublications.org

3. Saipnazarov Shaylovbek Aktamovich. INTEGRATION OF NON-GEOMETRIC AND GEOMETRIC METHODS. JCR. 2020; 7(6): 477-480. doi: 10. 31838/jcr. 07. 06. 86

4. Saipnazarov Sh. A., Khodjabaeva D. K. VARIOUS WAYS TO SOLVE PROBLEMS AT THE EXTREME, LXII INTERNATIONAL CORRESPONDENCE SCIENTIFIC AND PRACTICAL CONFERENCE «EUROPEAN RESEARCH: INNOVATION IN SCIENCE, EDUCATION AND TECHNOLOGY» April 7-8, 2020 London, United Kingdom

5. Saipnazarov Sh. A., Gulamov A. // Analytic and graphical methods for the analysis of equations and their analysis. Physics, Mathematics and Informatics. -2016. -№ 3 –p/ 56-60.

6. Саипназаров Ш. А., Асракулова Д. С. ПРИМЕНЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ ДЛЯ РАСЧЕТА ЛИМИТОВ [APPLYING INEQUALITIES TO CALCULATING LIMITS] // X INTERNATIONAL SCIENTIFIC REVIEW OF THE TECHNICAL SCIENCES, MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE. Свободное цитирование при указании авторства: https://scientific-conference.com/grafik.html (Boston, USA - 12 April, 2019). с.{см. сборник}