

## КОЛЕБАНИЯ СПИРАЛИ АРХИМЕДА С ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМИ ПЛОСКОСТИ КРИВОЙ СМЕЩЕНИЯМИ

Рузиев Т.Р

доцент Бухарского государственного педагогического института

*Аннотация. В работе рассматриваются колебания спирали Архимеда. Дифференциальные уравнения движения интегрируются асимптотическим методом. Для этого основные дифференциальные уравнения в частных производных сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами. Вязкоупругие свойства материалов учитываются с помощью комплексных модулей упругости. Приводится построение асимптотических разложений для собственных функций и собственных частот, соответствующих обоим видам колебаний многократно закрученной плоской спиральной пружины с закрепленными концами. Разработана методика получения асимптотических разрешающих уравнений на большом интервале изменения переменной  $\varphi$  и соответствующих граничных условий. Решение получено в виде рядов.*

*Ключевые слова: спирали Архимеда, обыкновенные дифференциальные уравнения, вязкоупругие свойства, смещения*

## VIBRATIONS OF ARCHIMEDEAN SPIRALS WITH DISPLACEMENTS PERPENDICULAR TO THE PLANE OF THE CURVE

Ruziyev T.R

Associate professor of Bukhara State Pedagogical Institute

*Abstract. The work examines vibrations of the Archimedes spiral. Differential equations of motion are integrated using the asymptotic method. To do this, the basic partial differential equations are reduced to ordinary differential equations with variable coefficients. The viscoelastic properties of materials are taken into account using complex elastic moduli. The construction of asymptotic expansions for eigenfunctions and eigenfrequencies corresponding to both types of oscillations of a repeatedly twisted flat spiral spring with fixed ends is presented. A technique has been developed for obtaining asymptotic resolving equations over a large range of changes in the variable  $\varphi$  and the corresponding boundary conditions. The solution is obtained in the form of series.*

*Keywords: Archimedes' spirals, ordinary differential equations, viscoelastic properties, displacements*

1. Введение. Спирали Архимеда широко применяются в машиностроении. Этот вид спиралей хорошо описывает манометрических измерительных устройств [1,2,3]. Кроме того, устройство можно устанавливать на уже смонтированной измерительной системе обычной конструкции. Разработанная в [4] эффективная модель - демпфирующее устройство для манометрических приборов, относится к измерительной технике и предназначена для защиты манометра от пульсации давления жидкости при измерениях среднего статического давления пульсирующих потоков жидкости. Сущность полезной модели заключается в том, что клапаны выполнены нормально закрытыми в виде подпружиненных относительно друг друга шариков, а на поверхностях клапанов и седел выполнены дроссельные канавки, обеспечивающие проход и дросселированные потока жидкости по поверхности их взаимного контакта [5,6,7]. Выше приведенные литературы охватывают широкий спектр моделей манометров произвольной конфигурации.

В настоящем времени в технике широко используются комбинированные спирали [8,9]. Таким образом, исследование динамики спиралей, а также исследование комбинированных спиралей для подачи жидкости являются актуальной задачей.

В данной работе рассмотрен случай колебаний спирали со смещениями, перпендикулярной плоскости кривой.

### 2. Методы

#### 2.1. Постановка задачи и методы решения

Уравнения движения для спирали Архимеда имеют вид:

Уравнения движения для спирали Архимеда имеют вид

$$\begin{aligned} & \frac{d^6 \omega}{d\varphi^6} + 9\mu r_1 \frac{d^5 \omega}{d\varphi^5} + [2 + \mu^2(10r_2 + 19r_1^2)] \frac{d^4 \omega}{d\varphi^4} + \\ & + [12\mu r_1 + \mu^2(5r_2 + 26r_1 r_2 + 8r_1^3)] \frac{d^3 \omega}{d\varphi^3} + \\ & + [1 + \mu^2(11r_2 + 20r_1^2) + \mu^4(r_4 + 6r_1 r_2 + 4r_2^2 + 7r_1^2 r_2)] \frac{d^2 \omega}{d\varphi^2} + \\ & + [3\mu r_1 + \mu^2(5r_2 + 26r_1 r_2 + 8r_1^3)] \frac{d\omega}{d\varphi} + \\ & + [\mu^2(r_2 + r_1^2) + \mu^4(r_4 + 6r_1 r_2 + 4r_2^2 + 7r_1^2 r_2)] \omega = \\ & = -\frac{\rho^2 \lambda}{q_0^3} \left( \omega - \frac{d^2 \omega}{d\varphi^2} + \mu r_1 \frac{d\omega}{d\varphi} \right), \quad \lambda = \frac{\rho \omega_0^4}{\mu^2 \pi} \quad (1) \end{aligned}$$

Общее решение уравнений (1) имеет вид

$$\begin{aligned} Y(\varphi) &= \sum_{i=1}^2 C_i \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k Y_{ik}(x) + \sum_{i=3}^6 C_i \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k (\bar{Y}_{ik}(x) \cos \varphi + \bar{Y}_{ik}(z) \sin \varphi), \\ v(\varphi) &= \sum_{i=1}^2 C_i \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k v_{ik}(z) + \sum_{i=3}^6 C_i \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k (\bar{v}_{ik}(z) \cos \varphi + \bar{v}_{ik}(z) \sin \varphi). \quad (2) \end{aligned}$$

Здесь  $v_{i0} = Y_i(z)$ ,  $i = 1, 2$ , где  $Y_i$  - линейно-независимые решения уравнения

$$c \frac{d^2 v_0}{dx^2} + 3C_1 \frac{dv_0}{dx} + \frac{\lambda_0}{q_0^2} v_0 = 0, \quad (3)$$

а функции  $v_{ik}(z)$ ,  $k > 0$ , последовательно определяются из неоднородных уравнений, левые части которых связывают с левой частью уравнения (3), а правые части зависят от уже определенных функций  $v_{sj}(z)$  с индексом  $j < k$ .

Функции  $Y_{ik}(x)$  равны линейным комбинациям функций  $v_{ij}(x)$  с индексами  $j < k - 1$ , а  $Y_{i0}(x) = Y_{i1}(x) = 0$ .

Функции  $\bar{v}_{ik}(x)$ ,  $\bar{Y}_{ik}$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{4AC}{A+C} \frac{d^2 \bar{v}_k}{dx^2} + \frac{12AC}{A+C} r_1 \frac{d\bar{v}_k}{dx} + \frac{4AC}{A+C} (r_2 + r_1^2) \bar{v}_k + \frac{\lambda_0}{q_0^2} \bar{v}_k &= f_{1k}(\bar{v}_j + \bar{v}_j), \quad (4) \\ \bar{Y}_{ik} &= -\bar{v}_k + f_{2k}(\bar{v}_j + \bar{v}_j), \end{aligned}$$

причем при  $k = 0$  правые части обращаются в нуль, а при  $k > 0$  - зависят от функций с индексами  $j < k$ . Уравнения для определения  $\bar{v}_k(x)$ ,  $\bar{Y}_k(z)$ , получаются из (4) заменой  $\bar{v}_j$  на  $\bar{v}_j$ ,  $\bar{v}_j$  на  $-\bar{v}_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, k$ , а также  $\bar{Y}_k$  на  $\bar{Y}_k$ . Из этих уравнений находим

$$\begin{aligned} \bar{v}_{20} &= -\bar{Y}_{20} = X_1(z), & \bar{v}_{21} &= \bar{Y}_{20} = 0; \\ \bar{v}_{40} &= -\bar{Y}_{40} = X_2(z), & \bar{v}_{41} &= \bar{Y}_{40} = 0; \\ \bar{v}_{50} &= \bar{Y}_{50} = 0, & \bar{v}_{51} &= -\bar{Y}_{50} = X_1(z); \\ \bar{v}_{60} &= \bar{Y}_{60} = 0, & \bar{v}_{61} &= -\bar{Y}_{60} = X_2(z); \end{aligned}$$

где  $X_1, X_2$  - линейно-независимые решения однородных уравнений (4). Отметим сходство уравнения (3), а также (4).

Определитель  $\Delta$  системы уравнений (1) для определения постоянных

$C_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ , в решении (2) при  $\mu = 0$  раскладывается на произведение  $\Delta = \Delta_1 \Delta_2$ , где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= Y_1(0, \lambda_0) Y_2(1, \lambda_0) - Y_2(0, \lambda_0) Y_1(1, \lambda_0) \\ \Delta_2 &= X_2(0, \lambda_0) X_2(1, \lambda_0) - X_2(0, \lambda_0) X_1(1, \lambda_0) \quad (5) \end{aligned}$$

Собственные функции, соответствующие корню уравнения  $\Delta_1 = 0$ , имеют в нем приближенные вид

$$v_0(x) = \psi(x) = Y_1(0, \lambda_0) Y_2(z) - Y_2(0, \lambda_0) Y_1(z), \quad Y_0(z) = 0, \quad (6)$$

а для корней уравнения  $\Lambda=0$  нулевым приближением ищутся семейство собственных функций

$$V_0(\varphi) = -\Gamma_0(\varphi) = (C_{01}\cos\varphi + C_{02}\sin\varphi)\theta(x),$$

$$\theta(x) = X_1(0)X_2(x) - X_2(0)X_1(x). \quad (7)$$

Из старших приближений находим, что аналогом к собственной функции (6) имеет порядок  $\mu$ , а к соответствующему ему собственному числу – порядок  $\mu^2$ . Корни уравнения  $\Lambda_2 = 0$ , так же как и в предыдущем случае, соответствуют два различных собственных числа, различающихся на величину порядка  $\mu$ , и две собственные функции, которые с точностью до величины порядка  $\mu$  имеют вид (7), однако постоянные  $\bar{C}_{01}$  и  $\bar{C}_{02}$  уже связаны векторным соотношением.

Уравнение спирали Архимеда в полярной системе координат имеет вид

$$R(\alpha) = \frac{R_2 - R_1}{2\pi k} \alpha, \quad \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2, \quad \alpha_1 = \frac{2\pi k R_1}{R_2 - R_1}, \quad \alpha_2 = \frac{2\pi k R_2}{R_2 - R_1} \quad (8)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  – расстояния концов спирали от начала полярной системы координат,  $k$  – число витков (не обязательно целое). Для того чтобы можно было применить возможный выше асимптотический метод, считаем, что  $k$  велико по сравнению с единицей, а также  $R_1 \neq 0$ . Находим кривизну

$$q_0(\alpha) = \frac{2\pi k}{R_2 - R_1} \cdot \frac{\alpha^2 + 2}{(\alpha^2 + 2)^{3/2}} \quad (9)$$

Теперь находим связь между полярным углом  $\alpha$  углом поворота касательной  $\varphi$ :

$$\varphi = \alpha - \alpha_1 + \frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha} + O(\mu^2) \quad (10)$$

С учетом (8), (9) и (10) получаем

$$q_0(z) = \frac{1}{(R_2 - R_1)x + R_1} \cdot \mu^2 \frac{(R_2 - R_1)^2 + 2}{R_1 R_2} \times$$

$$\times \frac{(x^2 - 2x)(R_2 - R_1)^2 + R_1 R_2}{2[(R_2 - R_1)x + R_1]^3} + O(\mu^4) \quad (13)$$

Уравнения (1) интегрируются в функции Бесселя (необходимые сведения о функциях Бесселя почерпнуты из [10, 12-15]):

$$x_{1,2} = [(R_2 - R_1)x + R_1]^2 J_{\pm \frac{1}{2}} \left\{ \frac{\sqrt{\Lambda_0} [(R_2 - R_1)x + R_1]^2}{3(R_2 - R_1)} \right\} \quad (14)$$

$$y_{1,2} = [(R_2 - R_1)x + R_1]^2 J_{\pm \frac{3}{2}} \left\{ \frac{\sqrt{\Lambda_0} [(R_2 - R_1)x + R_1]^2}{3\sqrt{2}(R_2 - R_1)} \right\} \quad (15)$$

С учетом частоты собственных (крутильных) колебаний, соответствующих корням уравнения  $\Lambda_1 = 0$ , такими

$$\omega_k = \frac{3(R_2 - R_1)}{2\pi k R_1^2} \sqrt{\frac{B}{\rho S}} b_k + O(\mu^3) \quad (16)$$

где  $b_k$  –  $k$ -й корень уравнения

$$J_{\frac{1}{2}} = \left[ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^2 b \right] J_{\frac{1}{2}}(b) - J_{\frac{1}{2}}(b) \left[ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^2 b \right] = 0. \quad (17)$$

Пары близких частот собственных колебаний, соответствующих корням уравнения  $\Lambda_2 = 0$ , равны

$$\omega_k^{(1,2)} = \frac{3\sqrt{2}(R_2 - R_1)d_k}{2\pi k R_1^2} \sqrt{\frac{B}{\rho S}} \times$$

$$\times \left\{ 1 \pm \frac{R_1^2 R_2 \Phi(R_2) \sqrt{\alpha_1^2 \cos^2 2\pi k + \alpha_2^2 \sin^2 2\pi k}}{2\pi k d_k [R_2^6 \Phi^2(R_2) - R_1^6 \Phi^2(R_1)]} \right\} + O(\mu^3). \quad (18)$$

$k$ -ый корень уравнения

$$J_{\frac{3}{2}}(d) J_{\frac{1}{2}} = \left[ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^2 d \right] J_{\frac{3}{2}}(d) - J_{\frac{3}{2}}(d) \left[ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^2 d \right] J_{\frac{1}{2}}(d) = 0. \quad (19)$$

если

$$a_i = \frac{3(R_2 - R_1)d_k}{R_1^3} \left[ R_2^4 \Phi(R_2) + (-1)^i \frac{J_{\frac{3}{2}} \left[ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^2 d_k \right]}{J_{\frac{1}{2}} d_k} R_1^2 R_2^2 \Phi(R_1) \right], i = 1, 2,$$

где

$$\Phi(R) = J_{\frac{3}{2}}(d_k) J_{\frac{1}{2}} \left[ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^2 d_k \right] - J_{\frac{1}{2}}(d_k) J_{\frac{3}{2}} \left[ \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^2 d_k \right]. \quad (20)$$

Ввиду сложности уравнений (3), а также (4) частоты собственных колебаний, соответствующих собственным функциям (6) и (7), со сдвигами, перпендикулярными плоскости витков, таковы:

$$\omega_k = \frac{3(R_2 - R_1)d_k}{2\pi R_1^3} \sqrt{\frac{C}{\rho S} + O(\mu^2)}, \quad (21)$$

$$\omega_k^{(1,2)} = \frac{6(R_2 - R_1)b_k}{2\pi R_1^3} \sqrt{\frac{AC}{(A+C)\rho S} + O(\mu^2)}, \quad (22)$$

где  $b_k$  и  $d_k$  – корни уравнений (17) и (19).

### 3. Результаты и анализ

Поскольку порядок определителя частотного уравнения равен  $2n$ , то уравнение будет иметь  $2n$  корней, которые являются частотами собственных колебаний [16-18] спиральной пружины. Те значения  $k$ , при которых определитель равен нулю, являются круговыми частотами собственных колебаний [3].

Результаты численного эксперимента показали, что с увеличением количества базисных функций  $\mu_1$  и  $\mu_2$  частота колебаний стремится к некоторому предельному значению. Согласно расчетам (рис. 1), для получения удивительных результатов по первой собственной частоте [19-20] колебаний достаточно вычислить по пять базисных функций

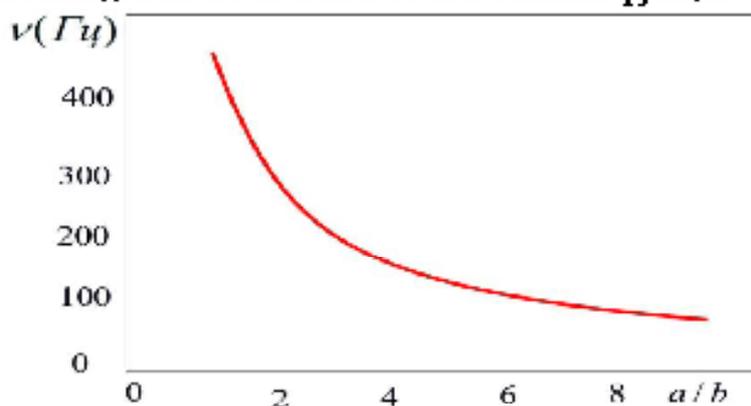


Рис.1. Изменение частоты от геометрических параметров поперечного сечения пружины ( $R=0.0380$ ,  $r=0.0070$ ,  $h=0.0010$ м,  $\gamma=240^\circ$ )

Из рис. 1 видно, что с увеличением параметра  $a/b$  первая частота снижается экспоненциальным законом.

Заключение. Частоты (21) и (22) совпадают с полученными М. В. Хвингия при рассмотрении продольных колебаний конических пружин с постоянным шагом [11], ибо он пренебрегал углом подъема витков. То обстоятельство, что Хвингия заменял пружину эквивалентным брусом, не дало ему возможности получить частоты собственных колебаний.

## ЛИТЕРАТУРА

Safarov I. I., Sh T. M. X. A. M., Ruziyev T. R. Application Of The Method Of Finite Element For Investigation Of The Dynamic Stress-deformed Condition Of Pipeline Sides When Exposed External Loads //Case Studies Journal ISSN (2305-509X)-Volume. – 2017. – T. 6. – C. 38-45.

Kuldashov N. et al. Natural waves in a spatial viscoelastic cylinder with a radial crack //E3S Web of Conferences. – EDP Sciences, 2023. – T. 417. – C. 06014.

Teshaev, M., Safarov, I., Boltaev, Z., Sobirova, R. N., & Ruziev, T. (2022, November). Propagation of natural waves in extended viscoelastic plates of variable thickness. In AIP Conference Proceedings (Vol. 2647, No. 1). AIP Publishing.

Safarov, I. I., & Boltaev, Z. I. (2018). Methods for Assessing the Seismic Resistance of Subterranean Hydro Structures Under the Influence of Seismic Waves. American Journal of Physics and Applications, 6(2), 51-62.

Safarov, I. I., Teshaev, M. X., Boltayev, Z. I., Nuriddinov, B. Z., & Ruziyev, T. R. (2022, December). Stationary deformation of cylindrical shells with viscoelastic filler. In Journal of Physics: Conference Series (Vol. 2373, No. 2, p. 022038). IOP Publishing.

Boltayev, Z., Safarov, I., Teshaev, M., Sharipova, D., & Ruziyev, T. (2022, November). On the action of normal moving load on a viscoelastic three-layer cylindrical shell. In AIP Conference Proceedings (Vol. 2647, No. 1). AIP Publishing.

Ishmamatov, M. R., Avezov, A. X., Ruziyev, T. R., Boltayev, Z. I., & Kulmuratov, N. R. (2021, May). Propagation of natural waves on a multilayer viscoelastic cylindrical body containing the surface of a weakened mechanical contact. In Journal of Physics: Conference Series (Vol. 1921, No. 1, p. 012127). IOP Publishing.

Safarov, I. I., Marasulov, A., Akhmedov, M. S., & Ruziyev, T. R. (2017). Vibrational Processes In Curvilinear Rods Interacting With Viscous Liquid. Case Studies Journal, 6(5), 46-59.

Ibrahimovich, S. I., Sharipovich, A. M., Razzoqovich, R. T., & Aslonovich, B. S. Influence of Elastic Waves on Parallel Cylindrical Shells with Perfect Fluid.

Boltaev, Z. Safarov I and Razokov T 2020 Natural vibrations of spherical inhomogeneity in a viscoelastic medium Int. J Sci Technol Res, 3674-3680.

Kuldashev, N. U., Sh, A. M., Ruziyev, T. R., & Umarov, A. O. (2018). Bending Vibrations Polymeric Pipes of Variable Section with Interference inside the Liquid. World Wide Journal of Multidisciplinary Research and Development. WWJMRD, (4 (2)), 72.

Sh, A. M., Ruziyev, T. R., Umarov, A. O., & Atoyev, A. B. (2018). Spatial Oscillations Varied Viscoelastic Pipeline under AC Varied Internal Pressure. World Wide Journal of Multidisciplinary Research and Development. WWJMRD, (4), 2.

Safarov, I. I., Teshaev, M. K., Boltaev, Z. I., Ruziev, T. R., & Jalolov, F. B. (2024, March). Stationary non-axisymmetric deformation of a three-layer viscoelastic cylindrical shell under normal loading. In AIP Conference Proceedings (Vol. 3045, No. 1). AIP Publishing.

Roziyev, T. (2022). ONKOLOGIK DAVOLASHDA GAMMA NURLARINING O'RNI VA AHAMIYATI. Buxoro davlat universitetining Pedagogika instituti jurnali, 2(2).

Болтаев, З. И., Собиров, С. Ж., Рузиев, Т. Р., & Рузиева, М. А. (2023). РАСПРОСТРАНЕНИЕ СДВИГОВЫХ ВОЛН В ВЯЗКОУПРУГИХ ДВУХСЛОЙНЫХ СРЕДАХ. European Journal of Interdisciplinary Research and Development, 16, 332-339.